

Istotne są natomiast wypływające z tej zasady wnioski ogólne. Obliczmy mianowicie dla dowolnego ustroju energię  $U_0$  w stanie „0”, a więc statycznie wyznaczalnym, i rzeczywistą energię  $U_{sn}$  tegoż ustroju, gdy działają również określone z równań kanonicznych siły  $X$ . Z zasady minimum energii wynika, że  $U_{sn} < U_0$ . Jeśli teraz wprowadzić pojęcie średnich w całej objętości  $V$  ustroju naprężeń  $\sigma_0$  i  $\sigma_{sn}$

$$(\sigma_0^2/2E)V = U_0 \quad \text{i} \quad (\sigma_{sn}^2/2E)V = U_{sn}, \quad (b)$$

to z poprzedniej nierówności wynika, że  $\sigma_{sn} < \sigma_0$ , czyli że *wprowadzenie statycznej niewyznaczalności w ustroju zmniejsza średnie naprężenia*. Nie oznacza to jednak redukcji naprężeń we wszystkich elementach ustroju.<sup>(1)</sup> Podobnie stosując twierdzenie Clapeyrona (9.21) można dowieść, że *wprowadzenie statycznej niewyznaczalności zmniejsza średnie odkształcenia ustroju*.

Poza wymienionymi dwiema zaletami dodatkową zaletą ustrojów statycznie niewyznaczalnych w porównaniu ze statycznie wyznaczalnymi jest zwiększenie pewności działania w sytuacjach awaryjnych, gdyż zniszczenie jakiegoś więzu powoduje w pierwszym przypadku na ogół tylko zmianę sposobu pracy, w drugim natomiast zamienia ustrój na mechanizm i powoduje katastrofę całości.

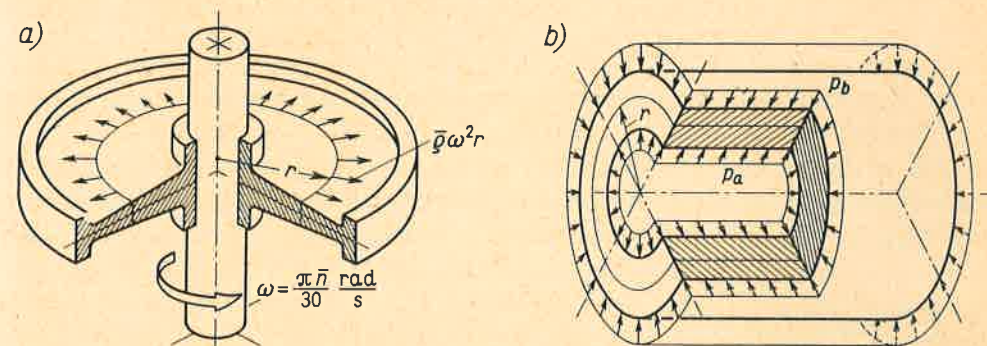
Zasadniczą wadą ustrojów statycznie niewyznaczalnych jest ich czułość na błędy montażu lub zmiany temperatury (art. 10.8). Obydwa te czynniki mają na ogół charakter losowy i należy liczyć się z rozrzutem odpowiadających im naprężeń. Zwiększenie zatem precyzji wykonania bądź montażu jest niezbędnym warunkiem stosowania takich ustrojów w praktyce.

## CZĘŚĆ CZWARTA

# Ustroje dwuwymiarowe

## 11 TARCZE KOŁOWE I GRUBOŚCIENNE RURY

W budowie maszyn stosujemy często elementy osiowosymetryczne i osiowosymetrycznie obciążone. Takie są na przykład wirujące płaskie krążki (rys. 11.1a) stosowane jako wirniki maszyn, tarcze szlifierskie itp. Ich analiza staje się zagadnieniem statyki, gdy wpro-



Rys. 11.1. Przykłady osiowosymetrycznych elementów osiowosymetrycznie obciążonych

dzimy masowe „siły bezwładności” wynikające z przyspieszenia dośrodkowego. Ponieważ zazwyczaj oś krążka jest osią obrotu, siły te są promieniowe i osiowosymetryczne, a ich natężenie  $q_r$  na jednostkę objętości

$$q_r = \rho \omega^2 r \text{ N/m}^3, \quad (11.1)$$

zależy od gęstości  $\rho$  materiału, promienia  $r$  określającego odległość badanego elementu od osi obrotu oraz prędkości kątowej  $\omega = \pi n/30 \text{ rad/s}$ , którą uważamy za stałą. Gdy  $\omega \neq \text{const}$ , wówczas występują także obwodowe „siły bezwładności” o natężeniu  $\rho(d\omega/dt)r$  mające jednak na ogół małe znaczenie. Podobnie pomijamy obciążenia obwodowe wynikające z oporów ruchu itp.

Inny przykład takich elementów osiowosymetrycznych stanowią grubościenne rury

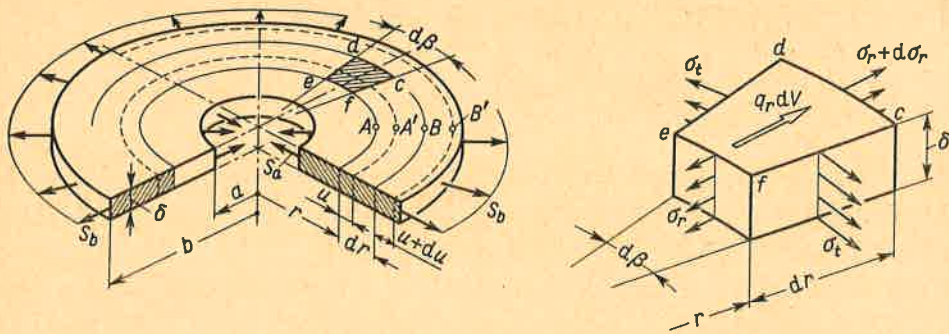
<sup>(1)</sup> Zadanie 10 art. 10.3.



pod działaniem wewnętrznego ( $p_a$ ) lub zewnętrznego ( $p_b$ ) ciśnienia (rys. 11.1b). Jak przekonamy się, to tzw. *zadanie Lamégo*, jest bardzo podobne do analizy wirujących krążków i dlatego utarło się na pozór różne zagadnienia badać łącznie.<sup>(1)</sup>

### 11.1. Analiza tarczy kołowej o stałej grubości $\delta$

Rozpatrzmy tu cienki krążek o stałej grubości  $\delta$  (rys. 11.2), którego obciążenie stanowią działające w jego płaszczyźnie promieniowe i osiowosymetryczne siły masowe  $q_r$  N/m<sup>3</sup> oraz siły powierzchniowe  $S_a$  i  $S_b$  N/m<sup>2</sup> na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni bocznej krążka. Tak obciążony cienki krążek nazywamy *tarczą*.



Rys. 11.2. Obraz odkształceń i naprężeń w tarczy o  $\delta = \text{const}$

Z racji osiowej symetrii i kształtu, i obciążenia wszystkie elementy tarczy jednakowo odległe od osi są równoprawne. Jeśli więc na skutek obciążenia tarczy i odkształcalności jej materiału pewien jej punkt  $A$  przemieszcza się promieniowo o  $u = \overline{AA'}$ , to takie samo przemieszczenie mają wszystkie punkty okręgu o tymże promieniu  $r$ . W rezultacie pierwotny okrąg przechodzi w okrąg o promieniu  $r+u$ , a każdy element jego obwodu doznaje wydłużenia względnego

$$\varepsilon_t = [2\pi(r+u) - 2\pi r] / 2\pi r = u/r. \quad (11.2)$$

Jak przekonamy się zaraz, przemieszczenie  $u$  jest funkcją  $r$ , wobec czego elementy promieniowe, jak  $AB$ , zmieniają swą długość. Jeśli mianowicie przemieszczenia punktów  $A$  i  $B$  są odpowiednio  $u$  i  $u+du$ , to, jak widać z rysunku, zmiana długości odcinka  $\overline{AB} = dr$  jest  $du$ , a względne wydłużenie  $\varepsilon_r$  w kierunku promieniowym

$$\varepsilon_r = du/\overline{AB} = du/dr. \quad (11.3)$$

Z kolei określimy obraz naprężeń działających na bokach wyciętego myślowo elementarnego klina  $cdef$ . Z racji osiowej symetrii kąty w narożach tego klina zostają po odkształceniu proste, a więc na jego bokach nie ma naprężeń stycznych, a tylko naprężenia nor-

<sup>(1)</sup> Szczegółową analizę tych zagadnień daje monografia J. Lipki, *Wytrzymałość maszyn wirnikowych*, Warszawa 1967, WNT.

malne. Te ostatnie są wobec tego naprężeniami głównymi. Ponieważ górna i dolna powierzchnia klina są swobodne, jedynymi więc naprężeniami, które mogą istnieć, są *naprężenia obwodowe*  $\sigma_t$  i *promieniowe* (radialne)  $\sigma_r$ , działające w płaszczyźnie tarczy, a więc dające płaski stan naprężenia. Ten ostatni fakt umożliwia, przy wykorzystaniu wzoru (7.19), uzależnić  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  od odkształceń  $\varepsilon_t$  i  $\varepsilon_r$  stanowiących tu odkształcenia główne. Podstawiając mianowicie  $\sigma_1 = \sigma_t$ ,  $\sigma_2 = \sigma_r$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_t$  i  $\varepsilon_2 = \varepsilon_r$  oraz uwzględniając (11.2) i (11.3) mamy według (7.19) wynik

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right), \quad (11.4)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right). \quad (11.5)$$

Wyraża on szukane  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  w funkcji tylko przemieszczenia  $u$ , które z kolei jest funkcją promienia  $r$ . Gdybyśmy więc znali z góry  $u(r)$ , wówczas wzory (11.4) i (11.5) określiłyby  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  jako funkcje  $r$ , umożliwiając tym samym analizę wytrzymałościową badanej tarczy, a w szczególności ocenę jej bezpieczeństwa.

W postawionym tu jednak zadaniu  $u(r)$  jest na razie nie znane. Aby je określić, musimy zbadać równowagę elementarnego klina, na który działają:

- na boku  $ef$  elementarna siła  $\sigma_r r d\delta$ ;
- na równoprawnych bokach  $de$  i  $cf$  dwie jednakowe siły  $\sigma_t dr \delta$ , tworzące ze sobą kąt  $d\beta$ ;
- na boku  $cd$  elementarna siła  $(\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr) d\beta \delta$ , przy której określeniu uwzględniono zarówno zmianę samego naprężenia  $\sigma_r$  na  $\sigma_r + d\sigma_r$ , jak i zmianę pola na  $(r+dr) d\beta \delta$ ;
- masowa siła proporcjonalna do objętości  $dV$  klina mająca wartość  $q_r dV = q_r r d\beta dr \delta$ .

Zauważmy, że jedynym, nie będącym tożsamością, warunkiem równowagi jest równanie sumy rzutów sił na kierunek promienia o postaci

$$-\sigma_r r d\beta \delta - (\sigma_t dr \delta) d\beta + (\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr) d\beta \delta + q_r r d\beta dr \delta = 0,$$

skąd po pominięciu małych trzeciego rzędu i skróceniu przez  $dr d\beta \delta$  otrzymujemy

$$\frac{d(\sigma_r r)}{dr} - \sigma_t + q_r r = 0. \quad (11.6)$$

Wstawiając teraz  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  z wzorów (11.4) i (11.5) mamy po przekształceniach równanie różniczkowe

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{1-\nu^2}{E} q_r = 0, \quad (11.7)$$

określające szukaną funkcję  $u(r)$ . Jeśli mianowicie wstawić  $q_r$  według wzoru (11.1), to łatwo sprawdzić, że

$$u(r) = C_1 r + \frac{C_2 a^2}{r} - \frac{1-\nu^2}{8E} \rho \omega^2 r^3, \quad (11.8)$$

gdzie  $C_1$  i  $C_2$  są bezwymiarowymi stałymi całkowania, które określamy z dwóch warunków brzegowych. Zazwyczaj takimi warunkami jest żądanie, aby dla  $r = a$  i  $r = b$  same prze-



mieszczenia bądź określone z (11.5) naprężenia  $\sigma_r$  przyjmowały zadane wartości. Szereg takich przykładów podano w art. 11.2.

Na zakończenie warto podkreślić, że rozwiązane tu zagadnienie należy do statycznie niewyznaczalnych. Widać to choćby z jednego będącego do dyspozycji równania równowagi (11.6), w którym mamy dwa niewiadome naprężenia. Użyta tu metoda rozwiązania przypomina opisaną w art. 10.1 metodę przemieszczeń. W odróżnieniu jednak od konstrukcji prętowej szukane tu przemieszczenie  $u$  nie dotyczy jednego węzła, jak na rys. 10.2, lecz jest ciągłą funkcją  $r$ . Ten ostatni fakt powoduje, że wynik ma tu postać równania różniczkowego (11.7), a nie algebraicznego, jak poprzednio.

### Zadania

1. Wyznaczyć obciążenie  $q_r$ ,  $S_a$  i  $S_b$  tarczy (rys. 11.2), jeśli  $u(r) = 0,5 \text{ mm} = u_0 = \text{const}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $b = 2a = 40 \text{ cm}$ .

Od p. Z równania (11.7)  $q_r = Eu_0/r^2(1-\nu^2)$  i na przykład dla  $r = 30 \text{ cm}$  jest  $q_r = 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}/0,30^2(1-0,3^2) = 1,22 \cdot 10^9 \text{ N/m}^3$ . Wartość  $S_a = (\sigma_r)_{r=a}$  według (11.5) jest  $S_a = Evu_0/a(1-\nu^2) = 165 \text{ MPa}$ . Podobnie  $S_b = (\sigma_r)_{r=b} = 82,5 \text{ MPa}$ .

2. Jaki jest fizyczny sens dwóch pierwszych składników prawej strony równania (11.8)?

Od p. Jest to przemieszczenie  $u$  w niewirującej tarczy ( $\omega = 0$ ), obciążonej siłami powierzchniowymi  $S_a$  i  $S_b$ .

3. Dwie tarcze geometrycznie podobne i z jednakowego materiału, jedna dwa razy większa od drugiej, mają w odpowiadających sobie punktach jednakowe przemieszczenia  $u$ . W której z tarcz naprężenia są większe i ile razy?

Od p. W mniejszej są dwukrotnie większe.

## 11.2. Analiza naprężeń i odkształceń tarczy

Punktem wyjścia analizy jest zależność (11.8). Wstawiając ją do równań (11.4) i (11.5) otrzymujemy podstawowe wzory na naprężenia

$$\sigma_t = B_1 + \frac{B_2 a^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2, \quad (11.9a)$$

$$\sigma_r = B_1 - \frac{B_2 a^2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2, \quad (11.9b)$$

gdzie nowe stałe  $B_1$  i  $B_2$  wiążą się z poprzednimi

$$B_1 = EC_1/(1-\nu), \quad B_2 = EC_2/(1+\nu). \quad (a)$$

Dla określenia  $B_1$  i  $B_2$  wykorzystamy fakt, że na brzegach  $r = a$  i  $r = b$  naprężenie  $\sigma_r$  musi być równe odpowiedniemu obciążeniu  $S_a$  lub  $S_b \text{ N/m}^2$ . Biorąc więc w (11.9b) kolejno  $r = a$  i  $\sigma_r = S_a$  oraz  $r = b$  i  $\sigma_r = S_b$  mamy dwa równania, z których rozwiązania

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{3+\nu}{8} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \sigma_P - \frac{a^2}{b^2-a^2} S_a + \frac{b^2}{b^2-a^2} S_b, \\ B_2 &= \frac{3+\nu}{8} \sigma_P - \frac{b^2}{b^2-a^2} S_a + \frac{b^2}{b^2-a^2} S_b, \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

gdzie  $\sigma_P = \rho(\omega b)^2 = \rho \bar{v}^2$  jest znaną z art. 2.3 wartością naprężenia obwodowego w cienkim pierścieniu wirującym z tą samą prędkością  $\bar{v}$ , jaką ma zewnętrzny brzeg tarczy.

Wykorzystując znalezione  $B_1$  i  $B_2$  obliczamy z wzorów (a) stałe  $C_1$  i  $C_2$ , a następnie z (11.8) wielkość  $u(r)$ . Szczególnie interesujące są przemieszczenia na brzegach wynoszące

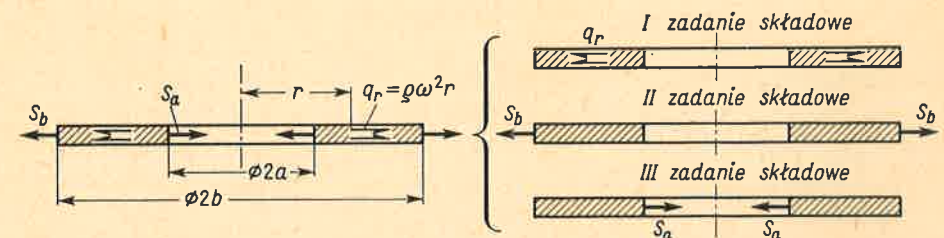
$$(u)_{r=a} = \frac{3+\nu}{4} \frac{\sigma_P a}{E} \left(1 + \frac{1-\nu}{3+\nu} \frac{a^2}{b^2}\right) - \frac{S_a a}{E} \left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} + \nu\right) + \frac{S_b a}{E} \frac{2b^2}{b^2-a^2}, \quad (11.11a)$$

$$(u)_{r=b} = \frac{3+\nu}{4} \frac{\sigma_P b}{E} \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} + \frac{a^2}{b^2}\right) - \frac{S_a b}{E} \left(\frac{2a^2}{b^2-a^2}\right) + \frac{S_b b}{E} \left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} - \nu\right). \quad (11.11b)$$

Mając  $B_1$  i  $B_2$  otrzymujemy z wzorów (11.9)  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  w funkcji  $r$  oraz parametrów  $\sigma_P$ ,  $S_a$  i  $S_b$ . Bezpieczeństwo tarczy oceniamy obliczając w funkcji  $r$  naprężenia zredukowane z wzoru (8.6a). Biorąc  $\sigma_1 = \sigma_r$ ,  $\sigma_2 = \sigma_t$ ,  $\sigma_3 = 0$ , mamy

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_t^2 - \sigma_t \sigma_r + \sigma_r^2}. \quad (11.12)$$

Ponieważ dyskusja wyników w ogólnej postaci jest nieprzejrzysta, rozdzielamy ogólny przypadek obciążenia tarczy na trzy prostsze (rys. 11.3). Pierwszy odpowiada działaniu



Rys. 11.3. Podział zagadnienia ogólnego na prostsze

tylko sił masowych  $q_r = \rho \omega^2 r$ , a pozostałe działaniu tylko obciążeń  $S_a$  i  $S_b$ . W pierwszym z nich po uporządkowaniu wzorów (11.9) mamy

$$\sigma_t = \frac{3+\nu}{8} \sigma_P \left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \frac{r^2}{b^2}\right), \quad \sigma_r = -\frac{3+\nu}{8} \sigma_P \left(1 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{r^2} - \frac{r^2}{b^2}\right), \quad (11.13)$$

których przebieg podaje rys. 11.4. Wprowadzenie tu wartości  $\sigma_P$ , jako porównawczej, ilustruje dobitnie korzyść zastosowania tarczy zamiast pierścienia w postaci pewnej niepomijalnej ( $\sim 16\%$ ) redukcji  $\sigma_t$  i małej wartości naprężeń  $\sigma_r$ . Niebezpiecznym punktem tarczy jest tu brzeg wewnętrzny, dla którego

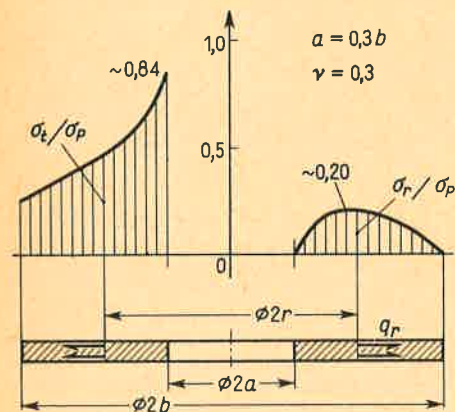
$$(\sigma_{\text{red}})_{\text{max}} = (\sigma_t)_{r=a} = \frac{3+\nu}{4} \left(1 + \frac{1-\nu}{3+\nu} \frac{a^2}{b^2}\right) \sigma_P. \quad (b)$$

W szczególnym przypadku krążka bez otworu, gdy  $a = 0$ , mamy z wzorów (11.13) naprężenia

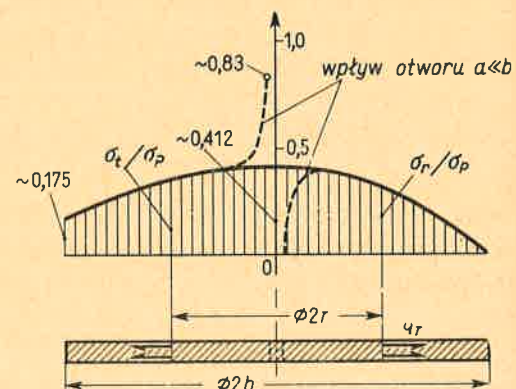
$$\sigma_t = \frac{3+\nu}{8} \sigma_P \left(1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \frac{r^2}{b^2}\right), \quad \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \sigma_P \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right). \quad (c)$$

Ich przebieg (rys. 11.5) wskazuje na dość znaczną tym razem redukcję naprężeń w porównaniu z  $\sigma_p$ . Niebezpiecznym punktem tarczy jest tu jej środek ( $r = 0$ ), gdzie

$$(\sigma_{red})_{max} = (\sigma_r)_{max} = (\sigma_t)_{max} = (3 + \nu) \sigma_p / 8. \quad (d)$$



Rys. 11.4. Wynik rozwiązania pierwszego zadania składowego



Rys. 11.5. Przebieg  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  w tarczy pełnej (—) i z małym otworem (---)

Gdy w pełnej tarczy wywiercić mały otwór ( $a \ll b$ ), wówczas, jak widać z rys. 11.5, przebieg  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  różni się znacznie od poprzedniego (wzory c) tylko w otoczeniu otworu, natomiast dla  $r > 4a$  wzory (11.13) i (c) dają praktycznie te same wyniki. Innymi słowy, otwór ten zaburza pierwotny rozkład  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$ , powodując lokalny spadek  $\sigma_r$  do zera i wzrost  $\sigma_t$  do wartości

$$\sigma_t \approx (3 + \nu) \sigma_p / 4,$$

czyli dwukrotnie większej niż dla krążka pełnego. Temu lokalnemu zaburzeniu, tzw. *koncentracji naprężeń*, odpowiada wzrost  $\sigma_{red}$ , a więc szkodliwy dla nas spadek bezpieczeństwa.

Zbadajmy z kolei działanie samego obciążenia  $S_b$  (rys. 11.3). Biorąc we wzorach (11.10)  $\sigma_p = 0$ ,  $S_a = 0$  mamy stałe  $B_1$  i  $B_2$ , które wstawione z kolei do (11.9) dają

$$\sigma_t = \frac{S_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \sigma_r = \frac{S_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right). \quad (11.14)$$

Przebieg tych naprężeń (rys. 11.6) wskazuje, że są one wszędzie dodatnie (rozciąganie). Ekstremalna wartość  $\sigma_r = S_b$  odpowiada  $r = b$ , natomiast ekstremalne  $\sigma_t$  są dla  $r = a$

$$(\sigma_t)_{max} = (\sigma_t)_{r=a} = 2S_b b^2 / (b^2 - a^2) \quad (e)$$

i są jednocześnie ekstremalną wartością  $\sigma_{red}$ . W szczególnym przypadku krążka pełnego, gdy  $a = 0$ , mamy z (11.14)

$$\sigma_t(r) = \sigma_r(r) = S_b = \text{const.} \quad (f)$$

Podobnie możemy zbadać działanie samego obciążenia  $S_a$ , otrzymując wartości  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$

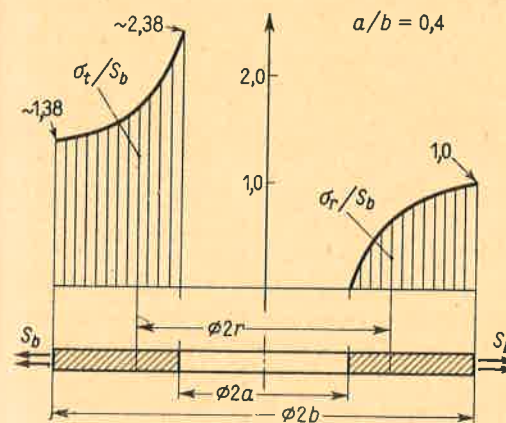
$$\sigma_t = -\frac{S_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right), \quad \sigma_r = -\frac{S_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \quad (11.15)$$

których przebieg (rys. 11.7) wskazuje, że naprężenia  $\sigma_t$  są tu wszędzie ujemne, a ich ekstremalna wartość jest dla  $r = a$

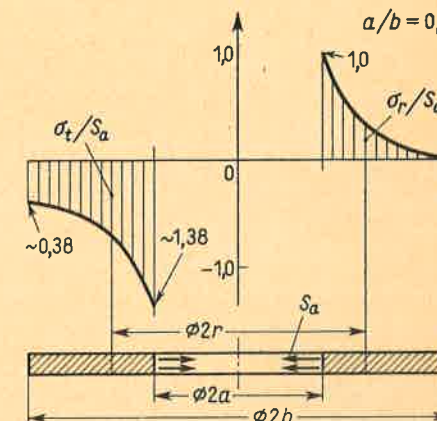
$$(\sigma_t)_{ekstr} = (\sigma_t)_{r=a} = -S_a (b^2 + a^2) / (b^2 - a^2). \quad (g)$$

Na tymże brzegu występuje ekstremalne  $\sigma_{red}$  o wartości, którą obliczymy z (11.12) wstawiając  $\sigma_t$  z wzoru (g) i  $\sigma_r = S_a$ . W wyniku

$$(\sigma_{red})_{max} = S_a \sqrt{3b^4 + a^4} / (b^2 - a^2). \quad (h)$$



Rys. 11.6. Wynik rozwiązania drugiego zadania składowego



Rys. 11.7. Wynik rozwiązania trzeciego zadania składowego

Na zakończenie warto zauważyć, że gdy  $a \rightarrow b$ , czyli gdy tarcza staje się cienkim pierścieniem, wówczas wszystkie sformułowane tu zależności przechodzą w znane z art. 2.3. Dla przykładu w zależnościach (11.13), gdy  $a \approx r \approx b$ , wówczas

$$\sigma_t \approx \frac{3 + \nu}{8} \sigma_p \left(3 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu}\right) = \sigma_p = \rho \bar{v}^2, \quad \sigma_r \approx 0,$$

a więc zgodne z wynikami art. 2.3.

### Zadania

1. Osadzona na wałku bez wcisku tarcza szlifierska (rys. 11.8) wiruje z  $\bar{n} = 3000$  obr/min. Określić jej współczynnik bezpieczeństwa  $n_m$ , jeśli  $\rho = 2,8$  Mg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 1/6$ , zaś  $R_m = 12$  MPa.

Odp. Z wzoru (d)  $\sigma_{max} = 4,86$  MPa i  $n_m = R_m / \sigma_{max} \approx 2,5$ .

2. Stalowa ( $\rho = 7,85$  Mg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0,3$ ) tarcza wentylatora z przyspawanymi 40 promieniowymi łopatkami (rys. 11.9) wiruje z  $\bar{n} = 3000$  obr/min. Wyznaczyć przebieg  $\sigma_t(r)$  i  $\sigma_r(r)$  w tarczy. Masa każdej łopatki  $m = 0,5$  kg, a promień jej środka ciężkości  $r_0 = 0,46$  m.

Rozwiązanie. Z racji dużej liczby łopatek przyjmujemy, że ich działanie jest rozłożone równomiernie na obwodzie zewnętrznym, wobec czego obciążenie  $S_b$  jest:

$$S_b = 40m\omega^2 r_0 / 2\pi b \delta = 36,1 \cdot 10^6 \text{ kgm/m}^2 \text{s}^2 = 36,1 \text{ MPa}.$$

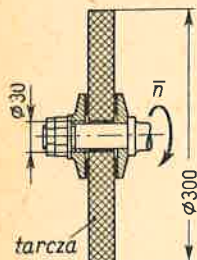


Wstawiając teraz do (11.10):  $(a/b)^2 = 1,56 \cdot 10^{-2}$ ,  $\sigma_p = \rho(\omega b)^2 = 123,9$  MPa,  $(3+\nu)/8 = 0,412$ ,  $(1+3\nu)/(3+\nu) = 0,576$ ,  $S_a = 0$ ,  $S_b = 36,1$  MPa mamy  $B_1$  i  $B_2$ , z (11.9) zaś

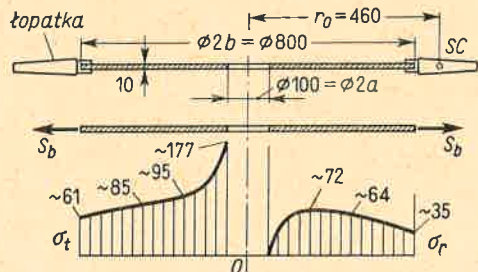
$$\begin{aligned} \sigma_t &= 89,0 + 88,2 (a/r)^2 - 29,7 (r/b)^2 \text{ MPa}, \\ \sigma_r &= 89,0 - 88,2 (a/r)^2 - 51,5 (r/b)^2 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Wykresy  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  podaje rysunek. Widać, że niebezpiecznym miejscem jest brzeg  $r = a$ , gdzie

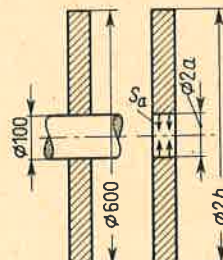
$$(\sigma_{red})_{max} = (\sigma_t)_{r=a} \approx 177 \text{ MPa}.$$



Rys. 11.8.



Rys. 11.9.



Rys. 11.10.

3. Plastikowa ( $\rho = 1,3$  Mg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0,37$ ) tarcza wklejona na nicodokształcalny w stosunku do niej wałek stalowy (rys. 11.10) wiruje z  $\bar{n} = 3000$  obr/min. Wyznaczyć  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  na wewnętrznym i zewnętrznym promieniu tarczy. Zbadać pewność połączenia tarczy z wałem, jeśli wytrzymałość tego złącza na odrywanie  $R_m = 15$  MPa.

Rozwiązanie. Na skutek sklejenia tarczy z wałem w miejscu tym pojawią się takie naprężenia  $S_a$ , że wypadkowe przemieszczenie  $(u)_{r=a} = 0$ . Z wzoru (11.11a) mamy więc

$$(u)_{r=a} = -\frac{S_a a}{E} \left( \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \nu \right) + \frac{3 + \nu}{4} \frac{\sigma_p a}{E} \left( 1 + \frac{1 - \nu}{3 + \nu} \frac{a^2}{b^2} \right) = 0,$$

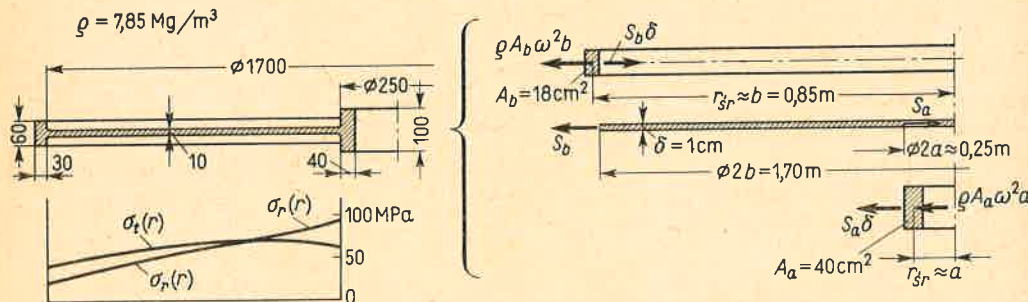
skąd, przy  $\sigma_p = \rho(\omega b)^2 = 11,5$  MPa,  $(a/b)^2 = 2,78 \cdot 10^{-2}$ , mamy

$$S_a \approx 6,8 \text{ MPa}.$$

Dalsza część zadania jest po prostu superpozycją wyrażeń (11.13) i (11.15), z których

$$(\sigma_t)_{r=a} \approx 2,5 \text{ MPa}, \quad (\sigma_r)_{r=a} = S_a, \quad (\sigma_t)_{r=b} \approx 2,0 \text{ MPa}, \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0.$$

Widać również, że złącze jest dostatecznie pewne, bo  $R_m > S_a$ . Współczynnik bezpieczeństwa  $n_m \approx 15/6,8 \approx 2,2$ .



Rys. 11.11. Analiza wirującej tarczy wzmocnionej pierścieniami

4. Złączona z dwoma pierścieniami stalowa tarcza (rys. 11.11) wiruje z  $\bar{n} = 1500$  obr/min. Traktując pierścienie jako cienkie (art. 2.3) wyznaczyć  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  w tarczy oraz naprężenia w pierścieniach.

Rozwiązanie. Rozdzielmy myślowo ustrój na tarczę i pierścienie. Uwidocznione przy tym oddziaływania  $S_a$  i  $S_b$  są takie, że w miejscach rozcięcia przemieszczenia  $(u)_{r=a}$  i  $(u)_{r=b}$  tarczy są odpowiednio równe przemieszczeniu  $\bar{u}_b$  pierścienia zewnętrznego i  $\bar{u}_a$  wewnętrznego. Te ostatnie według wzoru (2.6) są

$$\bar{u}_b = \frac{q_b b^2}{EA_b} \approx \frac{\rho(\omega b)^2 b}{E} - \frac{S_b \delta b^2}{EA_b}, \quad \bar{u}_a \approx \frac{\rho(\omega a)^2 a}{E} + \frac{S_a \delta a^2}{EA_a},$$

albowiem obciążenia  $q_b$  i  $q_a$  tych pierścieni na ich jednostkę długości są, jak widać z rysunku, w przybliżeniu<sup>(1)</sup> równe

$$q_b \approx \rho A_b \omega^2 b - S_b \delta, \quad q_a \approx \rho A_a \omega^2 a + S_a \delta.$$

Z warunków ciągłości  $\bar{u}_b = (u)_{r=b}$ ,  $\bar{u}_a = (u)_{r=a}$ , w których  $(u)_{r=a}$  i  $(u)_{r=b}$  określone są wzorami (11.11), wynikają dwa równania:

$$\psi_{a,b} S_b - \psi_{a,a} S_a = -\frac{3+\nu}{4} \sigma_p \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right), \quad \psi_{b,b} S_b - \psi_{b,a} S_a = \frac{3+\nu}{4} \sigma_p \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right),$$

w których  $\sigma_p = \rho(\omega b)^2$ , a bezwymiarowe współczynniki  $\psi$  są

$$\psi_{a,a} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \frac{a\delta}{A_a} + \nu, \quad \psi_{a,b} = \frac{2b^2}{b^2 - a^2}, \quad \psi_{b,a} = \frac{2a^2}{b^2 - a^2}, \quad \psi_{b,b} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \frac{b\delta}{A_b} - \nu.$$

Równania te przy podanych w zadaniu:  $(a/b)^2 = 2,16 \cdot 10^{-2}$ ,  $a\delta/A_a = 0,312$ ,  $b\delta/A_b = 4,722$ ,  $\sigma_p = 140$  MPa,  $\nu = 0,3$  mają postać

$$2,044 S_b - 1,656 S_a = -113,0 \text{ MPa}, \quad 5,466 S_b - 0,044 S_a = 113,0 \text{ MPa}.$$

Ich rozwiązanie  $S_a = 95,0$  MPa,  $S_b = 21,4$  MPa po wstawieniu do (11.10) i przejściu do (11.9) daje

$$\sigma_t = 78,8 - 17,2 (a/r)^2 - 33,2 (r/b)^2 \text{ MPa}, \quad \sigma_r = 78,8 + 17,2 (a/r)^2 - 57,7 (r/b)^2 \text{ MPa}.$$

Orientacyjny przebieg  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  podany na rysunku wskazuje istotną zmianę w pracy tarczy wywołaną przez względnie sztywną piastę. W odróżnieniu bowiem od rozkładów  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  z rys. 11.4 i 11.6 mamy tu w otoczeniu piasty zdecydowaną przewagę  $\sigma_r$  nad  $\sigma_t$ .

Naprężenia w pierścieniach obliczamy z wzorów (2.5)

$$\sigma_b = \frac{q_b b}{A_b} = \sigma_p - \frac{S_b \delta}{A_b} = 38,9 \text{ MPa}, \quad \sigma_a = \frac{q_a a}{A_a} = \sigma_p \frac{a^2}{b^2} + \frac{S_a \delta}{A_a} = 32,7 \text{ MPa}.$$

Są one, jak widać, znacznie mniejsze od wartości  $\sigma_p$ , która by istniała w pierścieniu zewnętrznym, gdy by był on swobodny.

### 11.3. Przybliżone rozwiązanie tarcz o zmiennej grubości

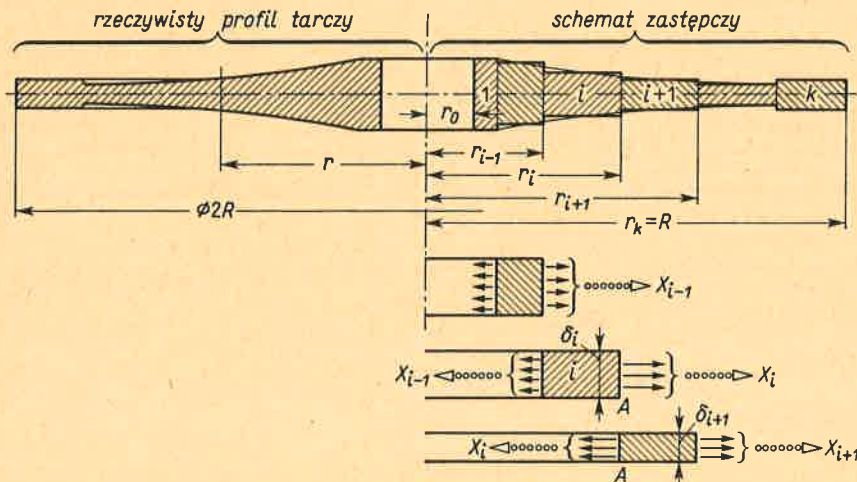
Ponieważ wirniki maszyn mają na ogół centralny otwór, wykonanie ich jako tarcz o  $\delta = \text{const}$  ma raczej bytu tylko wtedy, gdy prędkość obwodowa  $\bar{v} = \omega b$  nie jest duża, np. 100 m/s. Jak bowiem wynika z art. 11.2, panujące w takiej tarczy naprężenia są rzędu  $0,7 \div 0,8 \sigma_p$ . W nowoczesnych maszynach (turbinach, sprężarkach), w których  $\bar{v}$  są rzędu 200 ÷ 350 m/s, a  $\sigma_p = \rho \bar{v}^2$  rzędu 300 ÷ 1000 MPa (dla stali), konieczne jest ukształtowanie tarczy, dające znaczną redukcję naprężeń w stosunku do  $\sigma_p$ . Takim rozwiązaniem są tarcze o zmiennej grubości, a mianowicie grubsze w środku i ściągające się na zewnątrz (rys. 11.12).

Analizę takich tarcz sprowadzamy do badania zespołu tarcz o stałej grubości każda, zastępując możliwie wiernie rzeczywisty profil schodkowym, jak to pokazuje rysunek. Po wprowadzeniu oznaczeń

<sup>(1)</sup> Pomija się tu różnice między  $r_{st}$  a wymiarami  $a$  lub  $b$ .



(numeracja tarcz i ich gabarytowe wymiary) formułujemy warunek ciągłości przemieszczeń  $u$  na promieniu  $r$ , tj. na złączu tarcz  $i$  oraz  $i+1$ . W tym celu wydzielamy myślowo te tarcze z zespołu ujawniając przy tym ich wzajemne oddziaływanie  $X_{i-1}, X_i, X_{i+1}$  odniesione do jednostki długości odpowiedniego



Rys. 11.12. Przybliżona analiza tarczy o zmiennej grubości

okręgu.<sup>(1)</sup> Odpowiadające im obciążenia bocznych powierzchni tarcz przyjmujemy jako równomiernie rozłożone, wobec czego dla tarczy  $i$  są one

$$X_{i-1}/\delta_i \text{ oraz } X_i/\delta_i,$$

a dla tarczy  $i+1$  odpowiednio  $X_i/\delta_{i+1}$  oraz  $X_{i+1}/\delta_{i+1}$ .

Określmy teraz przemieszczenie  $(u_z)_i$  na zewnętrznym obrzeżu tarczy  $i$ . Wstawiając we wzorze (11.11b)

$$a = r_{i-1}, \quad b = r_i, \quad S_a = X_{i-1}/\delta_i, \quad S_b = X_i/\delta_i, \quad \sigma_p = \rho(\omega r_i)^2,$$

otrzymujemy od razu

$$(u_z)_i = \frac{r_i}{E} \left[ \frac{X_i}{\delta_i} \left( \frac{r_i^2 + r_{i-1}^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} - \nu \right) - \frac{X_{i-1}}{\delta_i} \frac{2r_{i-1}^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} + \frac{3+\nu}{4} \rho(\omega r_i)^2 \left( \frac{1-\nu}{3+\nu} + \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right) \right]. \quad (a)$$

Podobnie określamy przesunięcie  $(u_w)_{i+1}$  wewnętrznego obrzeża tarczy  $i+1$  wpisując we wzorze (11.11a) symbole

$$a = r_i, \quad b = r_{i+1}, \quad S_a = X_i/\delta_{i+1}, \quad S_b = X_{i+1}/\delta_{i+1}, \quad \sigma_p = \rho(\omega r_{i+1})^2,$$

w wyniku czego mamy

$$(u_w)_{i+1} = \frac{r_i}{E} \left[ \frac{X_{i+1}}{\delta_{i+1}} \frac{2r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} - \frac{X_i}{\delta_{i+1}} \left( \frac{r_{i+1}^2 + r_i^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} + \nu \right) + \frac{3+\nu}{4} \rho(\omega r_{i+1})^2 \left( 1 + \frac{1-\nu}{3+\nu} \frac{r_i^2}{r_{i+1}^2} \right) \right]. \quad (b)$$

Pisząc teraz warunek ciągłości  $(u_z)_i = (u_w)_{i+1}$  dochodzimy do równania, wiążącego trzy kolejne niewiadome  $X_{i-1}, X_i, X_{i+1}$ ,

$$-\alpha_{i,i-1} X_{i-1} + \alpha_{i,i} X_i - \alpha_{i,i+1} X_{i+1} = \alpha_{i,0} \sigma_p^* \delta^*, \quad (11.16a)$$

<sup>(1)</sup> Dla przykładu  $X_{i-1}$  (N/m) jest oddziaływaniem między tarczami  $i-1$  oraz  $i$ , czyli na okręgu  $r_{i-1}$ ,  $X_i$  (N/m) jest podobnym oddziaływaniem między tarczami  $i$  oraz  $i+1$  itd.

w którym  $\sigma_p^* = \rho(\omega R)^2$  jest naprężeniem w cienkim pierścieniu wirującym z prędkością  $\bar{v} = \omega R$ , a bezwymiarowe współczynniki

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i,i-1} &= \frac{2\xi_{i-1}^2 \eta_i}{\xi_i^2 - \xi_{i-1}^2}, & \alpha_{i,i} &= \eta_i \frac{\xi_i^2 + \xi_{i-1}^2}{\xi_i^2 - \xi_{i-1}^2} + \eta_{i+1} \frac{\xi_{i+1}^2 + \xi_i^2}{\xi_{i+1}^2 - \xi_i^2} + \nu(\eta_{i+1} - \eta_i), \\ \alpha_{i,i+1} &= \frac{2\eta_{i+1} \xi_{i+1}^2}{\xi_{i+1}^2 - \xi_i^2}, & \alpha_{i,0} &= \frac{3+\nu}{4} (\xi_{i+1}^2 - \xi_{i-1}^2) \end{aligned} \right\} \quad (11.16b)$$

są funkcjami bezwymiarowego promienia

$$\xi_i = r_i/R \quad (c)$$

oraz bezwymiarowej grubości  $\eta_i = \delta^*/\delta_i$ , gdzie  $\delta^*$  dowolna wartość stała, np. grubość  $\delta_k$  tarczy zewnętrznej.

Po ułożeniu równań (11.16) dla wszystkich miejsc złączenia tarcz, tj. dla  $i = 1, \dots, k-1$ , otrzymujemy dostateczną liczbę równań do określenia  $(k-1)$  niewiadomych. W pierwszym z tych równań, dla  $i = 1$ , mamy  $X_{i-1} = X_0 = 0$ , gdyż na otwór centralny nie działa żadne obciążenie. W ostatnim z równań, dla  $i = k-1$ , mamy bądź  $X_{i+1} = X_k = 0$ , gdy brzeg ten ( $r_{i+1} = R$ ) jest swobodny, bądź określoną z góry wartość  $X_k$  wynikającą z istnienia nabudowanych na tarczy elementów, np. łopatek (zadanie 2 art. 11.2).

Po wyznaczeniu wartości  $X$  obliczamy naprężenia  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  ze wzorów podanych w art. 11.2. Z uwagi na przybliżony charakter przedstawionej tu metody obliczenie to ograniczamy do jednego tylko punktu w każdej z tarcz. Dla ułatwienia rachunków, jako taki punkt obieramy średni geometryczny promień

$$\bar{r}_i = \sqrt{r_{i-1} r_i}, \quad (d)$$

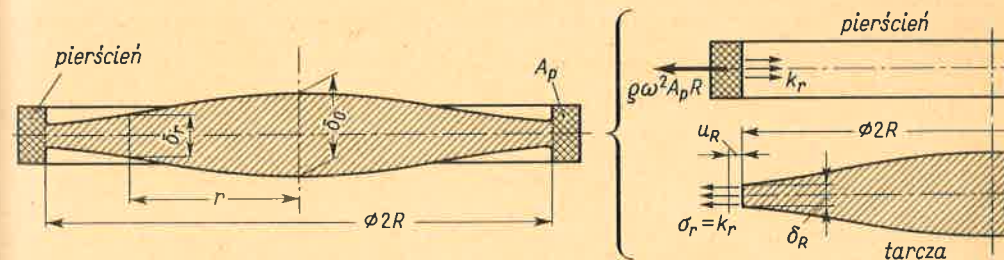
dla którego wypadkowe naprężenia  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  są

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \sigma_p^* \left[ \xi_{i-1} \xi_i + \frac{3+\nu}{8} (\xi_i - \xi_{i-1})^2 \right] + \frac{X_i \xi_i - X_{i-1} \xi_{i-1}}{\delta_i (\xi_i - \xi_{i-1})}, \\ \sigma_r &= \frac{3+\nu}{8} \sigma_p^* (\xi_i - \xi_{i-1})^2 + \frac{X_i \xi_i + X_{i-1} \xi_{i-1}}{\delta_i (\xi_i + \xi_{i-1})}. \end{aligned} \right\} \quad (11.17)$$

Powyższe wartości przyjmujemy jako rzędne wykresów  $\sigma_r(r)$  i  $\sigma_t(r)$  w rzeczywistej tarczy. Dokładność tak obliczonych wyników w porównaniu z rozwiązaniami ścisłymi jest zadowalająca (błąd 5%), jeśli tylko liczba zastępczych tarcz nie jest zbyt mała, np. 6. Nadmierne jednak powiększanie liczby tarcz (powyżej 10) nie jest wskazane z racji rosnących niedokładności rachunkowych.

Opisana metoda umożliwia kontrolę bezpieczeństwa tarczy o danych z góry wymiarach. Zagadnieniem odrębnym jest kształtowanie tarcz przez taki dobór grubości  $\delta(r)$ , aby pewna wielkość, np.  $\sigma_t$ , była zadaną z góry funkcją  $r$ . Jednym z takich zadań jest ukształtowanie tarczy *równomiernej wytrzymałości*, w której żądamy, aby było

$$\sigma_{red} = \sigma_r(r) = \sigma_t(r) = \text{const} = k_r.$$



Rys. 11.13. Tarcza równomiernej wytrzymałości



Rozwiązanie tego zadania daje w wyniku tarczę pełną, tj. nie mającą centralnego otworu (rys. 11.13), której grubość

$$\delta_r = \delta_0 e^{-(\sigma_p^*/2k_r)\xi^2}, \quad (11.18)$$

gdzie  $\delta_0$  – grubość tarczy w środku ( $r = 0$ ),  $\xi = r/R$  – bezwymiarowy promień, a  $\sigma_p^* = \rho(\omega R)^2$  – naprężenie w cienkim pierścieniu wirującym z tą samą prędkością co i tarcza. Istniejący na obrzeżu tarczy pierścień przejmuje jej promieniowe oddziaływanie o natężeniu  $\sigma_r \delta_R = k_r \delta_R$  na jednostkę długości obwodu, wobec czego wypadkowe naprężenie  $\sigma_w$  jest w nim zgodnie z wzorem (2.5)

$$\sigma_w = \frac{(\rho\omega^2 R A_p - k_r \delta_R) R}{A_p} = \sigma_p^* - k_r \frac{R \delta_R}{A_p} \quad (e)$$

f wywołuje zwiększenie jego promienia (wzór 2.6) o

$$\Delta R = \varepsilon R = \sigma_w R / E. \quad (f)$$

To z zwiększenie jest z kolei równe przemieszczeniu  $u_R$ , które najłatwiej obliczyć z (11.2) wstawiając  $\varepsilon_r = (\sigma_r - \nu\sigma_t)/E = k_r(1-\nu)/E$ , oraz  $r = R$ , wobec czego

$$u_R = k_r R (1-\nu)/E. \quad (g)$$

Z warunku  $u_R = \Delta R$  przy wykorzystaniu (e) mamy wynik

$$\frac{R \delta_R}{A_p} = \frac{\sigma_p^*}{k_r} (1-\nu), \quad (11.19)$$

wiążący ze sobą pole przekroju  $A_p$  pierścienia z grubością  $\delta_R$  na obrzeżu tarczy, tj. gdy  $r = R$ , a  $\xi = 1$ . Wynik powyższy można wykorzystać do doboru jednego z tych parametrów.

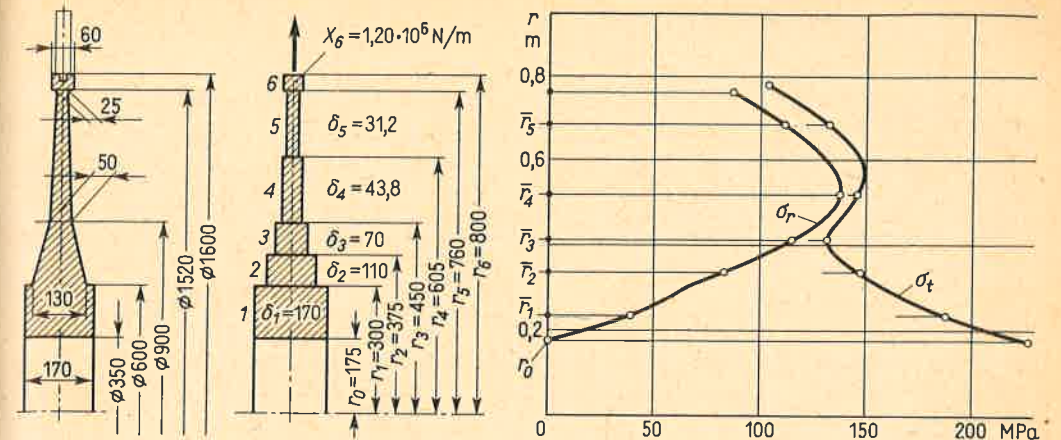
**Zadania**

1. Wyznaczyć rozkład  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  w stalowej ( $\rho = 7,85 \text{ Mg/m}^3$ ,  $\nu = 0,3$ ) tarczy (rys. 11.14) mającej 125 łopatek, każda o masie 0,284 kg i wirującej z  $\bar{n} = 3000 \text{ obr/min}$ . Środek ciężkości łopatek ma promień 0,86 m.

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od ustalenia wymiarów tarczy zastępczej, jak pokazuje rysunek. Pierścień zewnętrzny o polu  $A = 19 \text{ cm}^2$  zastępujemy również tarczą o zastępczej grubości

$$\delta_6 = A/(r_6 - r_5) = 19/4 = 4,75 \text{ cm}.$$

$i$	$r_i$ mm	$\delta_i$ mm	$\xi_i$	$\xi_i^2$ $\cdot 10^2$	$\xi_i^2 - \xi_{i-1}^2$ $\cdot 10^2$	$\xi_i^2 + \xi_{i-1}^2$ $\cdot 10^2$
1	2	3	4	5	6	7
0	175		0,219	4,80		
1	300	170	0,375	14,06	9,26	18,86
2	375	110	0,469	21,20	7,14	35,26
3	450	70	0,562	31,58	10,38	52,78
4	605	43,8	0,756	57,15	25,57	88,73
5	760	31,2	0,950	90,25	33,10	147,40
6	800	47,5	1,000	100,00	9,75	190,25



Rys. 11.14. Przykład analizy tarczy o zmiennej grubości

Ponadto działanie łopatek zastępujemy obciążeniem  $X_6$  (N/m), które określamy jak w zadaniu 2 art. 11.2 otrzymując

$$X_6 = 0,284 (\pi \cdot 3000/30)^2 \cdot 0,86 \cdot 125/2\pi \cdot 0,8 = 1,20 \cdot 10^6 \text{ N/m}.$$

Dalsze rachunki ujmujemy w tablicy. Biorąc bezwymiarowy promień  $\xi = r_i/r_6$ , obliczamy w kolumnach 5 ÷ 7 wartości pomocnicze  $\xi_i^2$ ,  $\xi_i^2 - \xi_{i-1}^2$  oraz  $\xi_i^2 + \xi_{i-1}^2$ . W kolumnie 8 określamy parametr  $\eta_i = \delta^*/\delta_i$  biorąc  $\delta^* = \delta_5 = 31,2 \text{ mm}$ . Z tych danych obliczamy  $\alpha_{i,i-1}$  (kolumna 9) i podobnie  $\alpha_{i,i+1}$  oraz  $\alpha_{i,0}$  (kolumny 13 i 14). Aby wyznaczyć  $\alpha_{i,i}$ , określamy naprzód wielkości podane w kolumnach 10 i 11, a następnie sumujemy kolejne dwa wiersze kolumny 10 z odpowiednim wyrazem kolumny 11, np.

$$\alpha_{3,3} = (2,263 + 2,472) + 0,080 = 4,815.$$

Biorąc teraz z tablicy te współczynniki  $\alpha$  oraz  $\sigma_p^* = \rho(\omega r_6)^2 = 496 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$  i  $\delta^* = 3,12 \cdot 10^{-2}$  otrzymujemy układ równań (11.16)

$\eta_i$	$\frac{2 \eta_i \xi_{i-1}^2}{\xi_i^2 - \xi_{i-1}^2}$	$\frac{\eta_i (\xi_i^2 + \xi_{i-1}^2)}{\xi_i^2 - \xi_{i-1}^2}$	$\nu (\eta_{i+1} - \eta_i)$	$\alpha_{i,i}$	$\frac{2 \eta_{i+1} \xi_{i+1}^2}{\xi_{i+1}^2 - \xi_i^2}$	$\alpha_{i,0} \cdot 10^2$
8	9	10	11	12	13	14
0,1836	0,1904	0,374	0,030	1,804	1,685	13,52
0,2836	1,116	1,400	0,048	3,711	2,710	14,45
0,4455	1,820	2,263	0,080	4,815	3,160	29,67
0,712	1,758	2,472	0,086	7,013	5,452	48,40
1,000	3,453	4,455	-0,102	17,168	13,485	35,34
0,657		12,815				

$$\begin{aligned}
 1,804 X_1 - 1,685 X_2 &= 2,092 \cdot 10^6, \\
 -1,116 X_1 + 3,711 X_2 - 2,710 X_3 &= 2,237 \cdot 10^6, \\
 -1,820 X_2 + 4,815 X_3 - 3,160 X_4 &= 4,591 \cdot 10^6, \\
 -1,758 X_3 + 7,013 X_4 - 5,452 X_5 &= 7,495 \cdot 10^6, \\
 -3,453 X_4 + 17,168 X_5 - 13,485 \cdot 1,20 \cdot 10^6 &= 5,478 \cdot 10^6,
 \end{aligned}$$

przy czym w pierwszym równaniu  $X_0 = 0$ , a w ostatnim  $X_6$  jest znane. Obliczone stąd niewiadome (w MN/m)

$$X_1 = 9,27, \quad X_2 = 8,68, \quad X_3 = 7,23, \quad X_4 = 4,58, \quad X_5 = 2,18, \quad X_6 = 1,20$$

podstawiamy do wzorów (11.17) otrzymując  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$ , na przykład w tarczy 4, gdy  $\xi_4 = 0,756$ ,  $\xi_3 = 0,562$   $\xi_4 - \xi_3 = 0,194$ , mamy

$$\sigma_t = 496 \left( 0,562 \cdot 0,756 + \frac{3,3}{8} \cdot 0,194^2 \right) + \frac{4,58 \cdot 0,756 - 7,23 \cdot 0,562}{43,8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,194} \approx 147 \text{ MPa},$$

$$\sigma_r = 496 \cdot \frac{3,3}{8} \cdot 0,194^2 + \frac{4,58 \cdot 0,756 + 7,23 \cdot 0,562}{43,8 \cdot 10^{-3} \cdot (0,756 + 0,562)} \approx 138 \text{ MPa},$$

przy czym wartości te odpowiadają promieniowi  $\bar{r}_4 = \sqrt{0,45 \cdot 0,605} \approx 0,52$  m. Obliczone w ten sposób wartości dają w wyniku wykresy  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  podane na rysunku. Wykresy te uzupełniono dodatkowo rzędnymi  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  dla  $r = r_0$ , obliczonymi z wzorów art. 11.2. Dla tarczy 6, różniącej się znacznie budową od pozostałych tarcz, wartości  $\sigma_r$  obliczone z wzorów (11.17) mają jedynie charakter bardzo przybliżonej informacji.

Jak widać, niebezpiecznym miejscem w tarczy jest jej brzeg wewnętrzny, gdzie  $\sigma_{red} = (\sigma_t)_{max} \approx 225$  MPa. Wartość ta jest przeszło dwukrotnie mniejsza niż  $\sigma_p^* = 496$  MPa i tym właśnie wyraża się korzyść zastosowania tarczy.

2. Na powierzchnię otworu niewirującej tarczy (rys. 11.14) działa promieniowy nacisk  $p_0 = -20$  MPa. Wykorzystując rozwiązanie zadania 1 obliczyć  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  w tarczy.

Od p. Ponieważ  $\omega = 0$ , zatem w układzie równań wyrazy wolne oraz  $X_6$  są równe zero, natomiast w równaniu pierwszym dochodzi po lewej stronie  $X_0 = p_0 \delta_1 = -3,4 \cdot 10^6$  N/m ze współczynnikiem 0,1904 wziętym z tablicy. Układ równań ma teraz postać

$$-0,1904 \cdot (-3,4 \cdot 10^6) + 1,804 X_1 - 1,658 X_2 = 0,$$

$$-1,116 X_1 + 3,711 X_2 - 2,710 X_3 = 0,$$

$$-3,453 X_4 + 17,168 X_5 = 0,$$

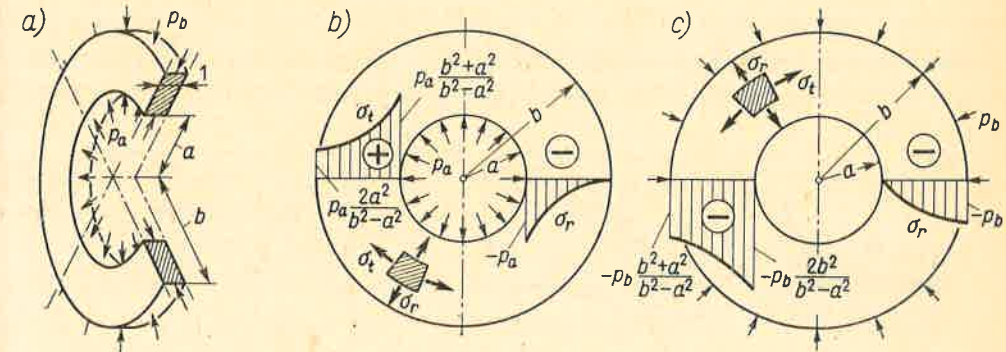
skąd:  $X_1 = -0,616$ ,  $X_2 = -0,284$ ,  $X_3 = -0,135$ ,  $X_4 = -0,040$ ,  $X_5 = -0,008$  (w MN/m). Reszta obliczeń jak poprzednio.

3. Stalowy pierścień ( $\rho = 7,85$  Mg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0,3$ ) o średnicy  $2R = 50$  cm i polu przekroju  $A_p = 8$  cm<sup>2</sup> wiruje z  $\bar{n} = 12\,000$  obr/min. Dobrac grubości  $\delta_r$  tarczy równomiernej wytrzymałości wzmacniającej ten pierścień, jeśli dopuszczalne naprężenia  $k_r = 300$  MPa. Jakie jest wtedy naprężenie w pierścieniu?

Od p. Wartość  $\sigma_p^* = \rho (\omega R)^2 = 773$  MPa; z wzoru (11.19) mamy  $\delta_R = 0,60$  cm, a z wzoru (11.18):  $\delta_0 = \delta_R e^{(\sigma_p^*/2k_r)} = 2,18$  cm. Naprężenie w pierścieniu  $\sigma = k_r(1 - \nu) = 210$  MPa.

## 11.4. Grubościennie rury przy działaniu ciśnienia

Najprostszym zagadnieniem tego rodzaju jest wspomniane na początku rozdziału zadanie Lamégo (rys. 11.1b). Jego rozwiązanie wynika z ogólnych zależności (11.9) i (11.10). Aby to udowodnić, rozważmy wycięty myślowo z rury plasterk o jednostkowej grubości



Rys. 11.15. Rozwiązanie zadania Lamégo

(rys. 11.15a). Traktując go jak niewirującą ( $\omega = 0$ ) tarczę, której obciążenie brzegowe (N/m<sup>2</sup>) stanowią

$$S_a = -p_a, \quad S_b = -p_b, \quad (a)$$

obliczmy z wzorów (11.10) stałe  $B_1$  i  $B_2$ , a następnie z wzorów (11.9) wartości naprężeń  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$ . Otrzymane stąd zależności

$$\sigma_t = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad (11.20a)$$

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad (11.20b)$$

nazywamy wzorami Lamégo. Odpowiadającą tym głównym naprężeniom zmianę jednostkowej grubości plasterka określimy z wzoru (7.14). Oznaczając tę zmianę jako  $\varepsilon_3$ , a naprężenia główne  $\sigma_1 = \sigma_t$ ,  $\sigma_2 = \sigma_r$  i  $\sigma_3 = 0$ , mamy wtedy

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E} (\sigma_t + \sigma_r) = \frac{2\nu}{E} \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{b^2 - a^2} = \text{const}. \quad (b)$$

Tak więc badany plasterk zostaje płaski i pasuje do analogicznych plasterków sąsiednich. Oznacza to, że działanie  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  określonych z (11.20) daje nie tylko ciągłość odkształceń i równowagę w płaszczyźnie plasterka, lecz także ciągłość odkształceń w kierunku osi rury. Spełnienie tego ostatniego warunku jest równoznaczne z tym, że wynik (11.20) jest prawdziwy.

Analiza wzorów Lamégo różni się od podanej w art. 11.2 (rys. 11.6 i 11.7) jedynie zmianą oznaczeń i znaków. I tak przy działaniu ciśnienia wewnętrznego (rys. 11.15b) naprężenia  $\sigma_r$  są wszędzie ujemne, a  $\sigma_t$  wszędzie dodatnie. Maksymalne naprężenie zre-



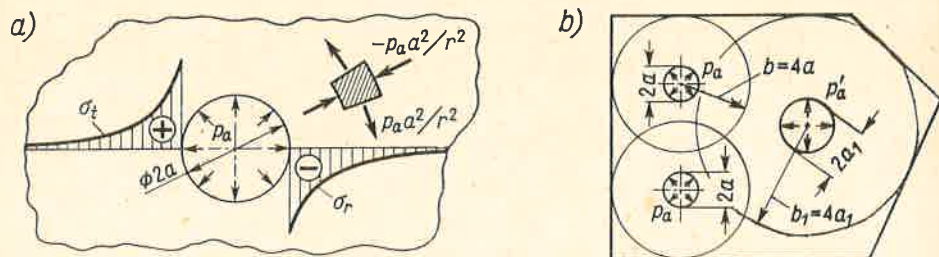
dukowane występuje na powierzchni otworu ( $r = a$ ) i według wzoru (h) art. 11.2 jest

$$|\sigma_{red}|_{max} = p_a \sqrt{3b^4 + a^4} / (b^2 - a^2). \quad (c)$$

Jeśli przy  $p_a = \text{const}$  zwiększamy grubość rury, to naprężenia  $\sigma_t$  i  $\sigma_{red}$  maleją, jednakże nie spadają do zera. Rozpatrzmy mianowicie przypadek, gdy  $b \rightarrow \infty$ , wtedy z wzorów (11.20)

$$\sigma_t = p_a a^2 / r^2, \quad \sigma_r = -p_a a^2 / r^2. \quad (d)$$

Tak więc w cylindrze z nieskończenie grubą ścianką naprężenia obwodowe i promieniowe mają te same bezwzględne wartości (rys. 11.16a) i są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu



Rys. 11.16. Analiza rury o nieskończonej grubości

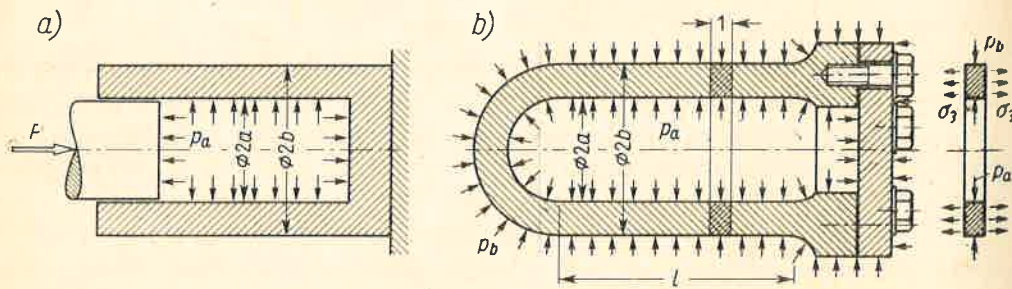
promienia  $r$ . Dla punktów, w których  $r \geq 4a$ , naprężenia  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  nie przekraczają 6% wartości maksymalnych. Jeśli zatem zadowolimy się taką dokładnością, to rurę, w której  $b \geq 4a$ , można traktować jako mającą nieskończenie grubą ściankę. Kształt konturu zewnętrznego jest przy tym nieistotny, jeśli tylko wszystkie jego punkty leżą od środka dalej niż  $4a$ . Wynika stąd, że analiza ciał pryzmatycznych, jak na rys. 11.16b, sprowadza się do schematu rury o nieskończonej grubości ścianki, przy czym według wzoru (c)

$$\sigma_{red} = p_a \sqrt{3}. \quad (e)$$

Podobnie wykorzystujemy informacje z rys. 11.6 w przypadku działania zewnętrznego ciśnienia  $p_b$  (rys. 11.15c). Gdy rura staje się pełnym wałkiem, wtedy zgodnie z (11.20)

$$\sigma_t = \sigma_r = \text{const} = -p_b. \quad (f)$$

Podane rozwiązanie (11.20) jest słuszne, gdy w przekroju poprzecznym rury nie ma naprężeń wzdłużnych, jak w cylindrze prasy (rys. 11.17a), w którym ciśnienie  $p_a$  na dno



Rys. 11.17. Dwa przypadki pracy rury grubościennie

równoważy się z reakcją podłoża. W przypadku grubościennie zbiornika (rys. 11.17b) niezależnie od  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  pojawiają się naprężenia  $\sigma_3$ . Jeśli przy tym długość rury  $l \gg b$ , to rozkład  $\sigma_3$  można przyjąć równomierny i wtedy z warunku równowagi

$$\sigma_3 = \frac{\pi a^2 p_a - \pi b^2 p_b}{\pi b^2 - \pi a^2} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}. \quad (g)$$

Istnienie  $\sigma_3$  ma wpływ na naprężenia zredukowane, które tym razem obliczamy z ogólnego wzoru (8.6a), biorąc  $\sigma_1 = \sigma_t$ ,  $\sigma_2 = \sigma_r$  i  $\sigma_3$  z wzoru (g). Niebezpiecznym miejscem jest z reguły wewnętrzna powierzchnia ( $r = a$ ) zbiornika, dla której

$$(\sigma_{red})_{r=a} = |p_a - p_b| b^2 \sqrt{3} / (b^2 - a^2). \quad (h)$$

Gdy grubość ścianki jest duża i  $b \geq 4a$ , wówczas jak widać, wyniki (c) i (h) są z techniczną dokładnością jednakowe.

Wpływ naprężeń  $\sigma_3$  uwidacznia się również w odkształceniach rury. O ile w przypadku  $\sigma_3 = 0$  interesujące nas przemieszczenia  $(u)_{r=a}$  i  $(u)_{r=b}$  obliczamy z (11.11), biorąc  $\omega = 0$  oraz  $S_a = -p_a$ ,  $S_b = -p_b$ , to gdy  $\sigma_3 \neq 0$  dochodzi, jak przy prostym rozciąganiu, przemieszczenie  $\bar{u} = -vr\sigma_3/E$ , wobec czego wypadkowe  $u$  dla  $r = a$  i  $r = b$  są

$$(u)_{r=a} = \frac{p_a a}{E} \left( \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + v \right) - \frac{p_b a}{E} \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - v \frac{\sigma_3 a}{E}, \quad (11.21a)$$

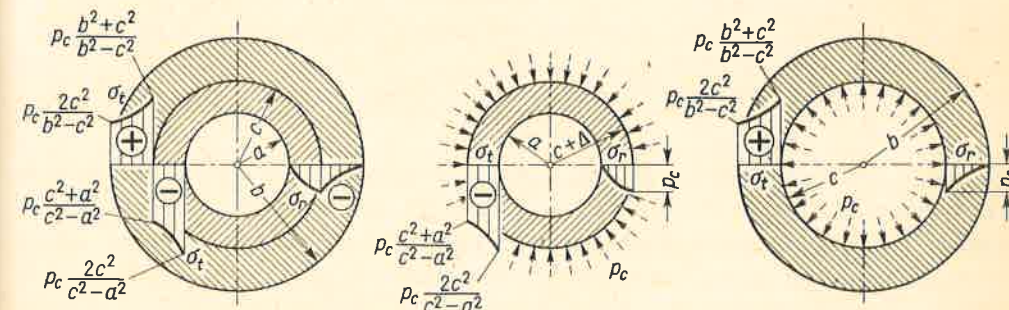
$$(u)_{r=b} = \frac{p_a b}{E} \frac{2a^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_b b}{E} \left( \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - v \right) - \frac{v \sigma_3 b}{E}. \quad (11.21b)$$

Jak wynika z wzoru (e), zwiększenie grubości ścianki rury nie daje żadnego efektu, w sensie zwiększenia bezpieczeństwa, gdy

$$p_a > p_{graniczne} = k_r / \sqrt{3}, \quad (i)$$

gdzie  $k_r$  — dopuszczalne dla danego materiału naprężenie przy rozciąganiu. Dla opanowania zatem bardzo wysokich ciśnień, np. 500 MPa ( $\sim 5000 \text{ kG/cm}^2$ ) musimy stosować bardzo dobre materiały, bądź znaleźć inne rozwiązanie konstrukcyjne.

Jednym z takich rozwiązań jest rura wielowarstwowa otrzymana przez złożenie z wciskiem dwu lub więcej rur (rys. 11.18). W stanie naturalnym rura wewnętrzna ma zewnętrzny promień  $c + \Delta$ , czyli o  $\Delta$  większy niż wewnętrzny promień rury zewnętrznej. Sam proces złożenia jest równoznaczny z wywarcie nacisku  $p_c$  na rurę wewnętrzną i takiegoż nacisku



Rys. 11.18. Analiza naprężeń własnych w rurze dwuwarstwowej



rozpychającego rurę zewnętrzną. Jego wartość obliczymy z warunku, że zmienione istnieniem  $p_c$  nowe promienie, tj. zewnętrzny rury wewnętrznej i wewnętrzny rury zewnętrznej, są równe. Te nowe promienie określimy z wzorów (11.21) uwzględniając jedynie zmianę oznaczeń i pomijając wpływ naprężeń wzdłużnych  $\sigma_3$ . I tak dla rury wewnętrznej, w której według rys. 11.18 mamy  $p_a = 0$ ,  $p_b = p_c$ , a symbol  $b$  zamieniamy na  $c$ , nowy promień zewnętrzny przy uwzględnieniu wzoru (11.21b) jest

$$c + \Delta + (u)_{r=c} = c + \Delta - \frac{p_c c}{E} \left( \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - \nu \right). \quad (j)$$

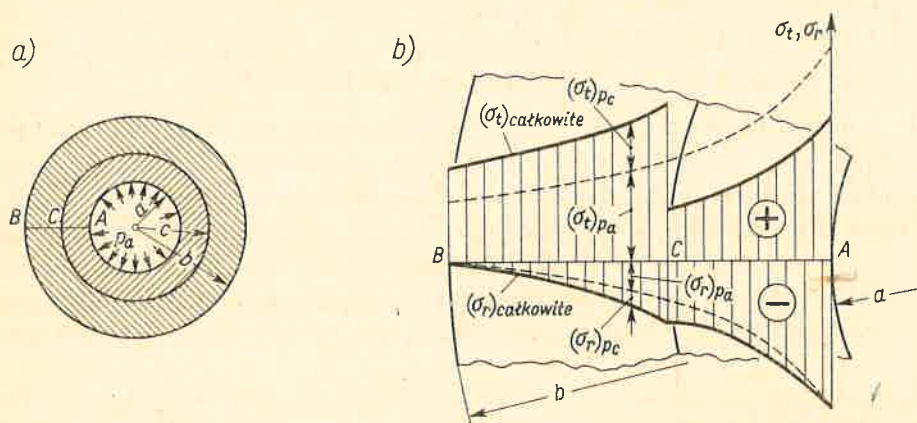
Podobnie dla rury zewnętrznej przy utożsamieniu oznaczeń  $c$  z  $a$  i  $p_a$  z  $p_c$  mamy z wzoru (11.21a) przy  $p_b = 0$

$$c + (u)_{r=c} = c + \frac{p_c c}{E} \left( \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \nu \right) \quad (k)$$

i z porównania wyrażeń (j) oraz (k) otrzymujemy

$$p_c = \frac{E \Delta}{2c^3} \frac{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}. \quad (11.22)$$

Mając wartość  $p_c$  i wykorzystując informacje z rys. 11.15 możemy określić w każdej z rur przebieg  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$ , jak pokazano szkicowo na rys. 11.18. Naprężenia te istnieją niezależnie od obciążenia rury jako całości, są to więc znane z art. 10.8 *naprężenia własne*. Jeśli teraz na złożoną już rurę dwuwarstwową działa ciśnienie  $p_a$  (rys. 11.19a), to wykres wypadko-



Rys. 11.19. Całkowite naprężenia  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  w rurze dwuwarstwowej

wych  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  jest superpozycją naprężeń własnych i naprężeń wywołanych ciśnieniem  $p_a$  w rurze jednolitej (rys. 11.19b). Jest rzeczą jasną, że przez stosowny dobór wciśku  $\Delta$  i wymiaru  $c$  można regulować przebieg  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$ . Optymalny dobór jest taki, przy którym ekstremalne naprężenia zredukowane w obydwóch rurach są równe, a jednocześnie możliwe najmniejsze (zadanie 3).

### Zadania

1. Dobrać grubość ścianki zbiornika (rys. 11.17b) o średnicy wewnętrznej 50 cm pracującego z dwukrotnym zapasem bezpieczeństwa na wewnętrzne ciśnienie  $p_a = 49$  MPa ( $\sim 500$  kG/cm<sup>2</sup>), jeśli  $R_e = 400$  MPa. Określić wartości naprężeń  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  i  $\sigma_3$  na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni zbiornika.

Odp. Wstawiając do (h)  $\sigma_{red} = R_e/n_e = 200$  MPa,  $p_a = 49$  MPa,  $p_b = 0$  otrzymujemy  $(a/b)^2 = 1 - (p_a \sqrt{3}/k_r) = 0,575$ , skąd  $b = 32,5$  cm. Z wzorów (11.20) i (g) dla  $r = a$  jest  $\sigma_r = -49$  MPa,  $\sigma_t = 165$  MPa,  $\sigma_3 = 36$  MPa, a dla  $r = b$  jest  $\sigma_r = 0$ ,  $\sigma_t = 72$  MPa,  $\sigma_3 = 36$  MPa.

2. Określić współczynnik bezpieczeństwa zbiornika z zadania 1 stosując hipotezę maksymalnego naprężenia stycznego.

Odp. Dla  $r = a$ ,  $\sigma_{red} = 2\tau_{max} = 165 - (-49) = 216$  MPa i  $n_e = R_e/\sigma_{red} = 1,85$ .

3. Stosując dla prostoty rozważań hipotezę  $\tau_{max}$  określić optymalne parametry  $\Delta$  i  $c$  rury dwuwarstwowej (rys. 11.19), jeśli  $a = 40$  cm,  $b = 60$  cm, a  $p_a = 98$  MPa ( $\sim 1000$  kG/cm<sup>2</sup>).

Rozwiązanie. Niezbędną wartość wstępnego nacisku  $p_c$  określimy z warunku równości ekstremalnych naprężeń zredukowanych w obydwóch rurach. Dla rury wewnętrznej, gdy  $r = a$ , mamy

$$\sigma_t = p_a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - p_c \frac{2c^2}{c^2 - a^2}, \quad \sigma_3 \approx p_a \frac{a^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_r = -p_a,$$

wobec czego według hipotezy  $\tau_{max}$

$$\sigma_{red} = 2\tau_{max} = \sigma_t - \sigma_r = p_a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - p_c \frac{2c^2}{c^2 - a^2} + p_a. \quad (\alpha)$$

Podobnie dla rury zewnętrznej mamy dla  $r = c$

$$\sigma_t = p_a \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{c^2} \right) + p_c \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2}, \quad \sigma_3 \approx p_a \frac{a^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_r = -\frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{b^2}{c^2} - 1 \right) - p_c$$

ekstremalne naprężenia zredukowane

$$\sigma_{red} = \sigma_t - \sigma_r = \frac{2p_a a^2 b^2}{(b^2 - a^2) c^2} + p_c \frac{2b^2}{b^2 - c^2}. \quad (\beta)$$

Porównując wyrażenia ( $\alpha$ ) i ( $\beta$ ) mamy równanie określające  $p_c$ :

$$p_c \left( \frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right) = p_a \frac{b^2}{c^2} \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2}. \quad (\gamma)$$

Wstawiając stąd wartość  $p_c$  do równania ( $\alpha$ ) mamy również

$$\sigma_{red} = p_a \frac{2b^2 c^2}{b^2(c^2 - a^2) + c^2(b^2 - c^2)}. \quad (\delta)$$

Łatwo sprawdzić, że dla  $c_{opt} = \sqrt{ab}$  wartość  $\sigma_{red}$  ma minimum

$$(\sigma_{red})_{min} = p_a b / (b - a), \quad (\epsilon)$$

a odpowiadająca temu wartość  $(p_c)_{opt}$  obliczona z równania ( $\gamma$ )

$$(p_c)_{opt} = p_a(b - a) / 2(b + a). \quad (\zeta)$$

Przy podanych wartościach liczbowych mamy więc

$$c_{opt} = 49,0 \text{ cm}, \quad (\sigma_{red})_{min} = 296 \text{ MPa}, \quad (p_c)_{opt} = 9,8 \text{ MPa} \approx 100 \text{ kG/cm}^2.$$

Wstawiając znaną wartość  $(p_c)_{opt}$  do wzoru (11.22) i biorąc  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa mamy optymalną wartość wciśku  $\Delta_{opt}$  jako

$$\Delta_{opt} = p_a \sqrt{ab} / E = 0,240 \text{ mm}$$

niezbędną do wytworzenia wstępnego nacisku  $(p_c)_{opt}$



4. Biorąc wyniki zadania 3 określić zmniejszenie  $\sigma_{red}$  wynikające z zastosowania rury dwuwarstwowej w porównaniu z jednolitą o tych samych  $a$  i  $b$ . Czy hipotezy  $\tau_{max}$  i Hubera dają tę samą ocenę?

Rozwiązanie. Dla rury jednolitej, gdy  $p_c = 0$ , z wzoru (8)  $(\sigma_{red})_{rura\ jednolita} = 2p_a b^2 / (b^2 - a^2)$  i biorąc stosunek  $(\sigma_{red})_{min}$  do wartości powyższej mamy

$$(\sigma_{red})_{min} / (\sigma_{red})_{rura\ jednolita} = (b+a)/2b = (60+40)/2 \cdot 60 = 0,833.$$

Wynik ten stanowi odpowiedź według hipotezy  $\tau_{max}$ . Według hipotezy Hubera analogiczny wynik dla  $r = a$  jest

$$(\sigma_{red})_{rura\ warstwowa} / (\sigma_{red})_{rura\ jednolita} = \sqrt{b^2 + ba + a^2} / b \sqrt{3} = 0,839.$$

Jak widać, różnice oceny są bez znaczenia. Istotniejsza różnica występuje w ocenie samej wartości  $\sigma_{red}$ .

Biorąc mianowicie z zadania 3 wartość  $p_c$  i  $c = \sqrt{ab}$  mamy dla  $r = a$

$$\sigma_1 = \sigma_t = p_a a / (b-a), \quad \sigma_2 = \sigma_r = -p_a, \quad \sigma_3 \approx p_a a^2 / (b^2 - a^2);$$

otrzymujemy z wzoru (8.6a) dla rury dwuwarstwowej

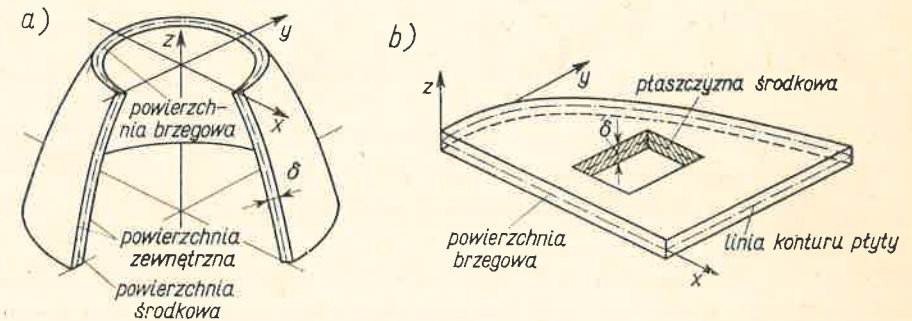
$$(\sigma_{red})_{Huber} = p_a b \sqrt{b^2 + ba + a^2} / (b^2 - a^2)$$

i dla danych jak w zadaniu 3 jest  $(\sigma_{red})_{Huber} = 256$  MPa, a więc o  $\sim 15\%$  mniej niż poprzednio.

## 12

PŁYTY I OSIOWOSYMETRYCZNE  
POWŁOKI

Pod nazwą płyt i powłok rozumiemy z reguły cienkościennie ustroje, w których jeden wymiar, tj. grubość  $\delta$ , jest mały w porównaniu z dwoma pozostałymi. Geometrię tych ustrojów ustalamy podając kształt tzw. *powierzchni środkowej* biegnącej w jednakowej odległości od *powierzchni zewnętrznych*. Gdy powierzchnia środkowa jest zakrzywiona (kula, paraboloida, stożek itp.), ustrój nazywamy powłoką (rys. 12.1a), gdy jest ona płasz-



Rys. 12.1. Geometryczny opis powłok i płyt

czyzną, ustrój jest płytą (rys. 12.1b). Uzupełnienie opisu stanowi określenie na powierzchni środkowej kształtu konturu (brzegu) ograniczającego płytę lub powłokę. Zależnie przy tym od kształtu brzegu dana powłoka, np. kulista, może być czaszą, odcinkiem lub pełną kulą. Podobnie płyta, zależnie od kształtu brzegu, może być prostokątna, kołowa<sup>(1)</sup> itp. Same powierzchnie brzegowe wycinające kontur na powierzchni lub płaszczyźnie środkowej przyjmujemy jako prostopadłe do tej powierzchni lub płaszczyzny. Ostatnią wreszcie informacją jest określenie grubości, która może być zmienna lub stała. Ten ostatni wariant jest najczęściej spotykany.

Analiza wytrzymałościowa płyt i powłok ma duże znaczenie praktyczne, gdyż do tego schematu sprowadzają się najróżnorodniejsze elementy maszyn. Technicznymi przykładami płyt są różne tłoki, płaskie dna lub ściany zbiorników obciążone z reguły prostopadłe do płaszczyzny środkowej. Schematem powłok objęte są płaskie zbiorników, kotłów,

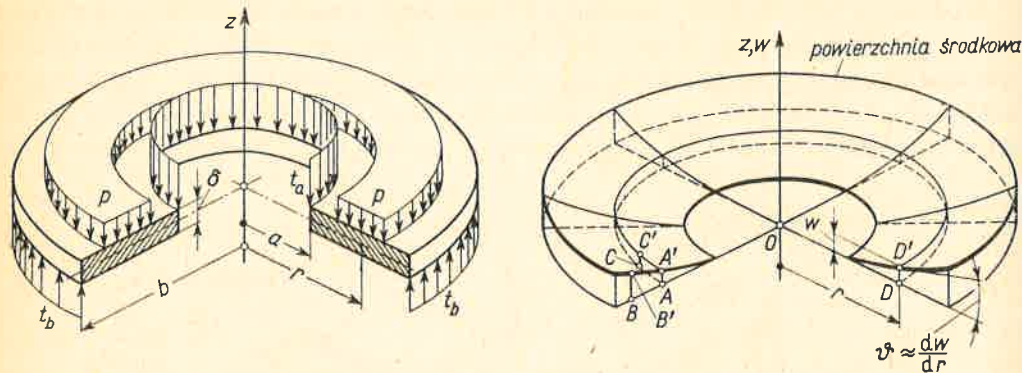
<sup>(1)</sup> W tej nomenklaturze opisane w rozdz. 11 tarcze są płytami obciążonymi w swej płaszczyźnie. Użycie słowa *tarcza* daje więc zwięzłą informację o kształcie ustroju i jego obciążeniu.



korpusy turbin, a także poszycia okrętów, wagonów, samolotów itp. Dość często ustroje te mają osiową symetrię kształtu i obciążenia i wtedy analiza jest prosta. Ten ostatni fakt jest powodem ograniczenia się w wytrzymałości materiałów do analizy takich właśnie ustrojów.

## 12.1. Osiowosymetryczne zgięcie płyty kołowej

Rozważmy kołową płytę o stałej grubości  $\delta$  obciążoną osiowosymetrycznie ciśnieniem  $p$  N/m<sup>2</sup> i siłami brzegowymi o natężeniu  $t_a, t_b$  N/m. Obciążenia te są prostopadłe do płaszczyzny płyty (rys. 12.2). Jak uczy doświadczenie, płyta ulegnie zgięciu, przy którym



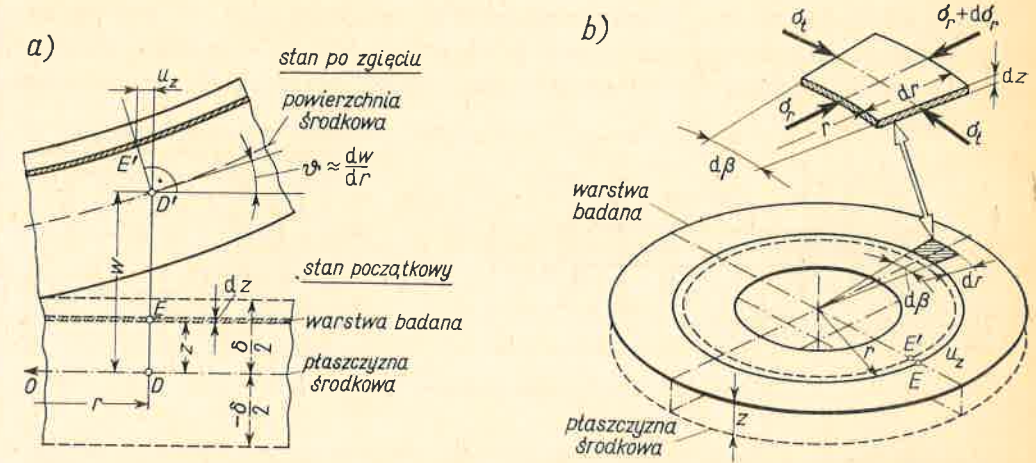
Rys. 12.2. Obraz obciążeń i ugięć płyty kołowej

płaszczyzna środkowa zamienia się w lekko zakrzywioną powierzchnię. Z racji osiowej symetrii i kształtu, i obciążenia płyty powierzchnia ta jest też osiowosymetryczna (obrotowa), a jej rzędne  $w$  (ugięcia) są funkcją jedynie promienia  $r$ .

Punktem wyjścia analizy jest założenie, że ugięcie  $w(r)$  jest małe nawet w porównaniu z grubością  $\delta$ . Oznacza to, że z dokładnością do małych wyższego rzędu przemieszczenia  $AA', BB', CC'$  punktów  $A, B, C$  płaszczyzny środkowej są do niej prostopadłe, a długości elementów  $AB, AC$  nie zmieniają się, czyli  $AB = A'B', AC = A'C'$ . Ponadto jest oczywiste, że kąt prosty  $BAC$  zostaje kątem prostym  $B'A'C'$ . Innymi słowy założenie, że  $w < \delta$ , oznacza, że płaszczyzna środkowa zamienia się w powierzchnię środkową bez zmiany długości elementów i kątów między nimi. W takim ujęciu płaszczyzna środkowa ma w płycie tę samą rolę, jaką przy zgięciu belek spełnia warstwa obojętna. Między innymi jest ona bazą, od której określamy położenie warstw płyty równoległych do płaszczyzny środkowej.

Następnym etapem analizy jest określenie obrazu i wartości naprężeń panujących w płycie. W tym celu wprowadzamy dwie hipotezy. Pierwsza z nich, analogiczna do reguły płaskich przekrojów w teorii zgięcia belek, głosi, że proste, prostopadłe do płaszczyzny środkowej w nieodkształconej płycie, zostają po jej odkształceniu proste i prostopadłe do powierzchni środkowej. Druga hipoteza stanowi odpowiednik pominięcia w zginanej belce wzajemnych nacisków włókien i głosi, że odkształcenia oraz wzajemne naciski warstw równo-

ległych do powierzchni środkowej w kierunku prostopadłym do tej powierzchni są pomijalne. Sens tych hipotez podaje rys. 12.3a będący powiększonym z rys. 12.2 fragmentem promieniowego przekroju  $OD$  płyty przed i po odkształceniu. I tak według I hipotezy prosta  $DE$ , prostopadła przed odkształceniem do płaszczyzny środkowej  $OD$ , zajmuje po odkształceniu



Rys. 12.3. Obraz przemieszczeń i naprężeń w warstwie płyty

położenie  $D'E'$  i w punkcie  $D'$  jest prostopadła do powierzchni środkowej. Ponadto zgodnie z II hipotezą długość  $DE = z$  zostaje nie zmieniona, czyli że  $DE = D'E'$ . Z obrazu tego widać, że ugięcie płyty powoduje promieniowe przesunięcie  $u_z$  punktu  $E$  badanej warstwy, przy czym

$$u_z = -E'D' \sin \vartheta \approx -z\vartheta \approx -z \frac{dw}{dr}, \quad (a)$$

gdzie  $\vartheta \approx dw/dr$  — tzw. kąt ugięcia płyty.

Z racji osiowej symetrii, to samo przesunięcie  $u_z$  mają wszystkie punkty badanej warstwy leżące na okręgu o promieniu  $r$ . Jeśli więc odizolować tę warstwę (rys. 12.3b), to obraz odkształceń w jej płaszczyźnie jest taki sam jak dla tarczy (rys. 11.2). Wynika stąd identyczność obrazu naprężeń, na który składają się naprężenia obwodowe  $\sigma_t$  i promieniowe  $\sigma_r$ . Ich wartości otrzymujemy od razu z wzorów (11.4) i (11.5) wstawiając określone powyżej  $u_z$  zamiast  $u$ , w wyniku czego

$$\sigma_t = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\vartheta}{r} + \nu \frac{d\vartheta}{dr} \right), \quad (12.1)$$

$$\sigma_r = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \nu \frac{\vartheta}{r} \right), \quad (12.2)$$

przy czym znaki minus oznaczają, że dla dodatnich  $z$  i  $\vartheta$  naprężenia te są ściskające, jak podano na rysunku.

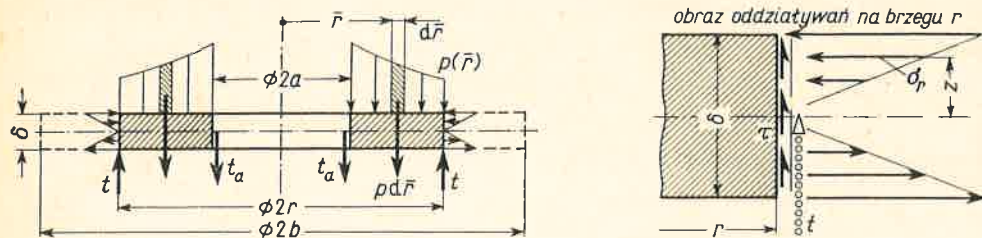
Jeśli powierzchnia ugięcia, tj.  $w(r)$ , a więc i kąt ugięcia  $\vartheta(r)$  są znane, to wzory (12.1) i (12.2) dają  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  jako funkcje  $r$ . W odróżnieniu od tarczy, naprężenia te nie są stałe wzdłuż grubości, lecz są proporcjonalne do  $z$ , czyli do odległości badanej warstwy od po-



wierzchni środkowej. Maksymalne wartości  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  panują więc w warstwach zewnętrznych ( $z = \pm \delta/2$ ) i wynoszą

$$(\sigma_t)_{\text{ekstr}} = \pm \frac{E\delta}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\vartheta}{r} + \nu \frac{d\vartheta}{dr} \right), \quad (\sigma_r)_{\text{ekstr}} = \pm \frac{E\delta}{(1-\nu^2)} \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \nu \frac{\vartheta}{r} \right). \quad (\text{b})$$

Drugą zasadniczą różnicą obrazów naprężeń w tarczy i płycie jest to, że przy zginaniu płyty występują na kołowych przekrojach poprzecznych również naprężenia styczne  $\tau$ . Aby to wykazać, zbadajmy równowagę centralnej części płyty (rys. 12.4), której obciąże-



Rys. 12.4. Równowaga centralnej części płyty

nie stanowią siły  $t_a$ , ciśnienie  $p$  oraz oddziaływania zewnętrznej części płyty na brzegu  $r$ . Te ostatnie składają się nie tylko z naprężeń  $\sigma_r$ , danych wzorem (12.2), lecz także z naprężeń  $\tau$ . Widać bowiem, że naprężenia  $\sigma_r$ , jak by one nie były, nie mogą zapewnić równowagi rzutów sił na oś płyty. Z tego warunku nie można co prawda określić samych naprężeń  $\tau$ , można jednak obliczyć ich wypadkową  $t$  N/m, tzw. *wydatek siły tnącej*, a mianowicie z oczywistego równania

$$2\pi r t - 2\pi a t_a - \int_a^r p(\bar{r})(2\pi \bar{r} d\bar{r}) = 0 \quad (\text{c})$$

otrzymujemy wydatek  $t$  w funkcji promienia  $r$  brzegu<sup>(1)</sup>

$$t = \frac{t_a a}{r} + \frac{1}{r} \int_a^r p(\bar{r}) \bar{r} d\bar{r}. \quad (\text{12.3})$$

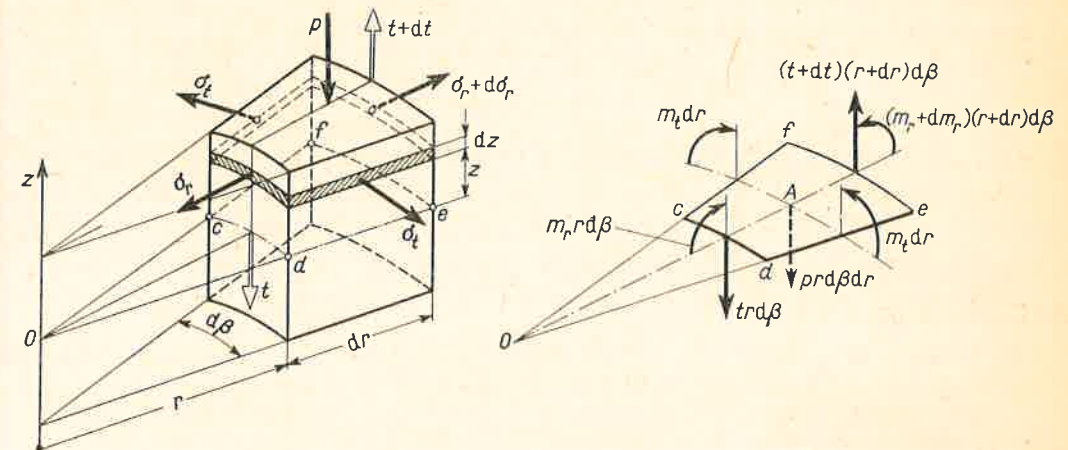
Zależność (12.3) nie jest jedyną, jaka wynika z równowagi płyty. Bardziej wnikliwą informację otrzymamy badając, podobnie jak w tarczy, równowagę wyciętego myślowo elementarnego klina (rys. 12.5). Na jego ścianach<sup>(2)</sup>, poza znanymi już siłami  $tr d\beta$  i  $(t+dt)(r+dr) d\beta$  oraz elementarnym obciążeniem  $pr d\beta dr$ , występują również naprężenia  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$ , które poprzednio nie wpływały na równowagę. Ich działanie na poszczególnych bokach sprowadza się do wypadkowych momentów. Przykładowo, na pionowym boku  $de$  każdej elementarnej siły  $\sigma_r dz dr$  odpowiada przeciwna siła  $-\sigma_r dz dr$  działająca na plasterk położony symetrycznie względem płaszczyzny środkowej i tworząca z nią

<sup>(1)</sup> Dla odróżnienia promienia  $r$  brzegu od promienia jako zmiennej w wyrażeniu podcałkowym, tę ostatnią oznaczono tu przez  $\bar{r}$ .

<sup>(2)</sup> Z racji osiowej symetrii jest rzeczą asną, że na pionowych bokach  $cf$  i  $de$  nie ma żadnych sił tnących.

parę sił. Suma takich par daje tylko moment. Momenty te utarło się wyrażać w formie tzw. *wydatków momentów*  $m_r$ ,  $m_t$  Nm/m, tj. natężenia momentu gnącego na jednostkę długości odpowiedniego boku. W takim ujęciu wypadkowe momenty na bokach  $de$  i  $cd$  są odpowiednio

$$m_t dr, \quad m_r r d\beta,$$



Rys. 12.5. Analiza równowagi elementu płyty

i gdy  $\sigma_r$  oraz  $\sigma_t$  są dodatnie, jak na rysunku, wówczas

$$m_t dr = - \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} (\sigma_t dr dz) z = -dr \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_t z dz, \quad m_r r d\beta = -r d\beta \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_r z dz. \quad (\text{d})$$

Wstawiając do tych wyrażeń wartości  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  z wzorów (12.1) i (12.2) i pamiętając, że całkowanie jest tylko względem  $z$ , mamy

$$m_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\vartheta}{r} + \nu \frac{d\vartheta}{dr} \right) \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} z^2 dz, \quad m_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \nu \frac{\vartheta}{r} \right) \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} z^2 dz. \quad (\text{e})$$

Ponieważ

$$\int_{-\delta/2}^{+\delta/2} z^2 dz = \frac{\delta^3}{12},$$

wyniki (e) można ostatecznie przedstawić jako

$$m_t = D \left( \frac{\vartheta}{r} + \nu \frac{d\vartheta}{dr} \right) \text{ Nm/m}, \quad m_r = D \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \nu \frac{\vartheta}{r} \right) \text{ Nm/m}, \quad (\text{12.4})$$

gdzie  $D$  jest tzw. *szttywnością płyty na zginanie*

$$D = E\delta^3/12(1-\nu^2) \text{ Nm}^2/\text{m}. \quad (\text{12.5})$$

Łatwo zauważyć, że z sześciu równań równowagi dla badanego elementarnego klina cztery są spełnione tożsamościowo. Z pozostałych jedno, wyrażające warunek sumy

rzutów na oś  $z$ , daje po przekształceniach znaną już zależność (12.3). Ostatnie — równowagi momentów względem stycznej do boku  $ef$

$$[(m_r + dm_r)(r + dr) d\beta - m_r r d\beta] - (m_t dr d\beta) + [(pr d\beta dr)(dr/2)] + (tr d\beta dr) = 0$$

jest sumą czterech składników. Pierwszy z nich to różnica momentów działających na ścianach  $ef$  i  $cd$ , trzeci i czwarty to momenty sił  $(pr d\beta dr)$  i  $(tr d\beta)$ . Składnik drugi to wypadkowy moment z dwóch momentów  $m_t dr$ , których wektory tworzą ze sobą kąt  $d\beta$ . Odrzucając w powyższym równaniu małe trzeciego rzędu otrzymujemy

$$m_t - d(m_r r)/dr = tr, \quad (f)$$

a po wstawieniu  $m_t$  i  $m_r$  z zależności (12.4) i uwzględnieniu, że dla płyty o stałej grubości  $D = \text{const}$ , mamy

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r^2} = -\frac{t}{D}, \quad (12.6a)$$

Zapisując powyższe równanie w postaci

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(\vartheta r)}{dr} \right] = -\frac{t}{D}, \quad (12.6b)$$

otrzymujemy po dwukrotnym jego scałkowaniu wynik

$$\vartheta = C_1 \frac{r}{l} + C_2 \frac{l}{r} - \frac{1}{Dr} \int (r \int t dr) dr, \quad (12.7)$$

gdzie  $l$  — dowolnie obrany parametr o wymiarze długości, a  $C_1, C_2$  — bezwymiarowe stałe całkowania. Nie wchodząc na razie w szczegóły ich obliczenia, stwierdźmy, że gdy są one znane, wówczas z wzorów (12.4) znane są też  $m_r$  i  $m_t$  jako

$$m_t = B_1 + B_2 \frac{l^2}{r^2} - \left( \frac{F}{r} + \nu \frac{dF}{dr} \right), \quad m_r = B_1 - B_2 \frac{l^2}{r^2} - \left( \frac{dF}{dr} + \nu \frac{F}{r} \right), \quad (12.8a)$$

gdzie dla skrócenia zapisu wprowadzono oznaczenia

$$B_1 = \frac{C_1 D (1 + \nu)}{l}, \quad B_2 = \frac{C_2 D (1 - \nu)}{l}, \quad F(r) = \frac{1}{r} \int (r \int t dr) dr. \quad (12.8b)$$

Mając wartości  $m_r$  i  $m_t$  możemy obliczyć wartości naprężeń, albowiem z porównania wzorów (12.4) z (12.1) i (12.2) wynika, że

$$\sigma_t = -12m_t z/\delta^3, \quad \sigma_r = -12m_r z/\delta^3. \quad (g)$$

Ekstremalne wartości  $\sigma_t$  i  $\sigma_r$  odpowiadają warstwom  $z = \pm \delta/2$

$$(\sigma_t)_{\text{ekstr}} = \pm \frac{6m_t}{\delta^2}, \quad (\sigma_r)_{\text{ekstr}} = \pm \frac{6m_r}{\delta^2} \quad (12.9)$$

i stanowią punkt wyjścia do oceny bezpieczeństwa. Ponieważ w tych warstwach  $\tau = 0$ , ocenę tę daje zależność (11.12), która po uwzględnieniu wzorów (12.9) przybiera postać

$$(\sigma_{\text{red}})_{\text{ekstr}} = (6/\delta^2) \sqrt{m_t^2 - m_r m_t + m_r^2}, \quad (12.10)$$

gdzie  $m_t$  i  $m_r$  są wielkościami algebraicznymi i funkcjami  $r$ . Wreszcie całkując funkcję

$\vartheta(r) = dw/dr$  określamy ugięcie  $w$ , przy czym pojawia się dodatkowa (trzecia) stała całkowania  $C_3$ .

Podsumowując całość rozważań widzimy ścisłą analogię analizy tarcz i płyty, wynikającą z ujęcia płyty jako pakietu związanych ze sobą nieskończenie wielu warstw (tarcz). To związanie powoduje, że warstwy te nie mogą ślizgać się po sobie, a ich przemieszczenia są współzależne. To z kolei daje identyczny, proporcjonalny do  $z$ , rozkład  $\sigma_r(r)$  i  $\sigma_t(r)$ . Ta fizyczna analogia odbija się w podobieństwie ostatecznych równań (12.6) i (11.7). Odmienność zagadnień tarczy i płyty tkwi w większej różnorodności obciążeń płyt niż tarcz, gdzie  $q_r$  (wzór 11.1) jest w zasadzie jedynym obciążeniem mającym większe praktyczne znaczenie.

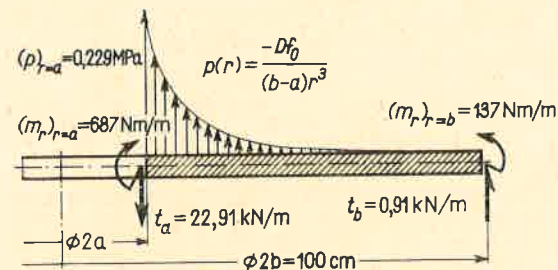
### Zadania

1. Wyznaczyć ciśnienie  $p(r)$  oraz obciążenia na brzegach płyty (rys. 12.2), jeśli jej ugięcie  $w(r) = f_0(r-b)/(b-a)$ . Obliczenia wykonać dla  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa,  $\nu = 0,3$ ,  $a = 10$  cm,  $b = 50$  cm,  $f_0 = 0,5$  cm,  $\delta = 1$  cm.

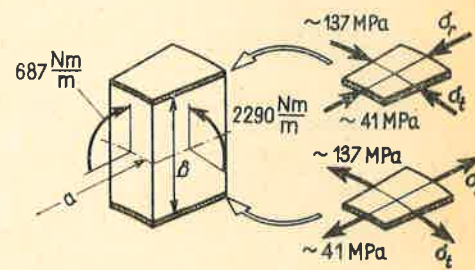
Odp. Z równania (12.6)  $t = Df_0/(b-a)r^2$ , gdzie  $D = 1,833 \cdot 10^4$  N m<sup>2</sup>/m; dla  $r = a$  jest  $t_a = Df_0/(b-a)a^2 \approx 22,9$  kN/m, a dla  $r = b$  jest  $t_b = 0,91$  kN/m. Z równania (12.4)  $m_r = \nu Df_0/(b-a)r$ , skąd  $(m_r)_{r=a} \approx 687$  Nm/m i  $(m_r)_{r=b} \approx 137$  Nm/m. Wreszcie różniczkując równanie (12.3) mamy

$$\frac{d(tr)}{dr} = p(r)r, \quad \text{skąd} \quad p(r) = \frac{1}{r} \frac{d(tr)}{dr} = \frac{-Df_0}{(b-a)r^3}.$$

Uwzględniając dodatnie znaki  $p(r)$ ,  $t$  i  $m_r$ , jak na rys. 12.2 i 12.5 mamy w wyniku całość obciążenia podaną na rys. 12.6.



Rys. 12.6. Do zadania 1



Rys. 12.7. Do zadania 2

2. Obliczyć wartość  $(\sigma_{\text{red}})_{\text{ekstr}}$  na wewnętrznym brzegu płyty z zadania 1 oraz współczynnik bezpieczeństwa, jeśli  $R_e = 240$  MPa.

Odp. Ponieważ z (12.4) jest  $(m_r)_{r=a} = Df_0/(b-a)r$ , zatem z (12.10)

$$(\sigma_{\text{red}})_{\text{ekstr}} \text{ dla } r=a = [6Df_0/\delta^2 a(b-a)] \sqrt{1-\nu+\nu^2} \approx 122 \text{ MPa},$$

a współczynnik bezpieczeństwa  $n_e = R_e/(\sigma_{\text{red}})_{\text{ekstr}} \approx 2$ . Obraz naprężeń w elementarnym klinie jest taki jak na rys. 12.7.

3. W danej płycie (rys. 12.2) obciążonej tylko wydatkami  $t_a$  i  $t_b$  powiększono dwukrotnie wymiary  $a$  i  $b$  nie zmieniając grubości ani wydatków  $t_a$  i  $t_b$ . Jak zmieniają się w odpowiadających sobie punktach obydwóch płyt: a) wydatki  $t$ ; b) kąty ugięcia  $\vartheta$ ; c) momenty  $m$  i naprężenia?

Odp. a) nie zmieniają się; b) wzrosną czterokrotnie; c) wzrosną dwa razy.



L. p.	Obrazy: płyty i obciążenia	$t(r)$ i $F(r)$	$l$	Sformułowanie i postać warunków brzegowych	Wynik: $m_r(r)$ , $m_t(r)$ , $\vartheta(r)$	Wykresy $m_r(r)$ i $m_t(r)$	Obraz ugięcia $w(r)$ i strzałka $f$
1		$t(r) \equiv 0$ $F(r) \equiv 0$	$l = a$	$(m_r)_{r=a} = m_a, (m_r)_{r=0} = 0,$ czyli $B_1 - B_2 = m_a$ $B_1 - B_2 \frac{a^2}{b^2} = 0$	$m_r = -\frac{m_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)$ $m_t = -\frac{m_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)$ $\vartheta = -\frac{m_a a^2 r}{(1-\nu) D (b^2 - a^2)} \times \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{b^2}{r^2}\right)$		 $f = \frac{m_a a^2}{2D(1-\nu)} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a}\right)$
2		$t(r) \equiv 0$ $F(r) \equiv 0$	$l = a$	$(m_r)_{r=a} = 0, (m_r)_{r=b} = m_b,$ czyli $B_1 - B_2 = 0$ $B_1 - B_2 \frac{a^2}{b^2} = m_b$	$m_r = \frac{m_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$ $m_t = \frac{m_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$ $\vartheta = \frac{m_b b^2 r}{(1-\nu) D (b^2 - a^2)} \times \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{a^2}{r^2}\right)$		 $f = \frac{m_b b^2}{2D(1-\nu)} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a}\right)$
3		$t(r) = \frac{t_a a}{r}$ $F(r) = \frac{t_a a r}{4} \times \left(2 \ln \frac{r}{a} - 1\right)$	$l = a$	$(m_r)_{r=a} = 0, (m_r)_{r=b} = 0,$ czyli $B_1 - B_2 - \frac{t_a a}{4} (1-\nu) = 0$ $B_1 - B_2 \frac{a^2}{b^2} - \frac{t_a a}{4} (1+\nu) \times \left(2 \ln \frac{b}{a} + \frac{1-\nu}{1+\nu}\right) = 0$	$m_r = \frac{t_a a (1+\nu)}{2} \left[-\ln \frac{r}{a} + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \ln \frac{b}{a}\right]$ $m_t = \frac{t_a a (1+\nu)}{2} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{r}{a}\right]$ $\vartheta = \frac{(m_t - \nu m_r) r}{D(1-\nu^2)}$		 $f = \frac{t_a a}{8D} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (b^2 - a^2) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{4a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2\right]$
4		$t(r) = \frac{pr}{2}$ $F(r) = \frac{pr^3}{16}$	$l = b$	$(\vartheta)_{r=0} = 0, (\vartheta)_{r=b} = 0,$ czyli $C_2 = 0, C_1 - \frac{pb^3}{16D} = 0,$ a więc $B_1 = \frac{pb^2}{16(1+\nu)}, B_2 = 0$	$m_r = \frac{1+\nu}{16} pb^2 \left(1 - \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{r^2}{b^2}\right)$ $m_t = \frac{1+\nu}{16} pb^2 \left(1 - \frac{1+3\nu}{1+\nu} \frac{r^2}{b^2}\right)$ $\vartheta = \frac{pb^2}{16D} r \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)$		 $w = -\frac{pb^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^2$ $f = \frac{pb^4}{64D}$

$t(r) = \frac{pr}{2} - \frac{pa^2}{2r}$   
 $F(r) = \frac{pr}{2} \left(\frac{r^2}{8} - \frac{3a^4}{8r^2} + \frac{1}{4} a^2 - a^2 \ln \frac{r}{a}\right)$   
 $l = a$   
 $(\vartheta)_{r=b} = 0, (m_r)_{r=a} = 0$   
 $C_1 = \frac{1}{4} \frac{pb^3}{(1+\nu) D (b^2 - a^2)}$   
 $C_2 = \frac{1}{4} \frac{pb^3}{(1+\nu) D (b^2 - a^2)}$

dla  $r = a$   
 $m_r = 0$   
 $m_t = 2B_1$   
 $B_1 = B_2 = K \cdot D \cdot b \cdot \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{(1-\nu)b^2 + a^2(1+\nu)}$   
 $K = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{8} - \frac{3a^4}{8r^2} + \frac{1}{4} a^2 - a^2 \ln \frac{b}{a}\right)$

L. p.	Obrazy: płyty i obciążenia	$t(r)$ i $F(r)$	$l$	Sformułowanie i postać warunków brzegowych
5		$t(r) = \frac{pr}{2}$ $F(r) = \frac{pr^3}{16}$	$l = b$	$(\vartheta)_{r=0} = 0, (m_r)_{r=b} = 0,$ czyli $C_2 = 0,$ a więc $B_2 = 0$ oraz $B_1 - \frac{3+\nu}{16} pb^2 = 0$
6		$t(r) = \frac{P}{2\pi r}$ $F(r) = \frac{Pr}{8\pi} \times$ $\times \left( 2 \ln \frac{r}{b} - 1 \right)$	$l = b$	$(\vartheta)_{r=0} = 0, (m_r)_{r=b} = 0,$ czyli $C_2 = 0,$ a więc $B_2 = 0$ oraz $B_1 - \frac{P(1-\nu)}{8\pi} = 0$

## 12.2. Przykłady analizy płyt kołowych

Jak już pokazano, kluczem do analizy jest określenie kąta ugięcia  $\vartheta(r)$ , co według (12.7) sprowadza się do wyznaczenia funkcji

$$F(r) = \frac{1}{r} \int \left( r \int t \, dr \right) dr$$

oraz stałych  $C_1, C_2$  lub związanych z nimi stałych  $B_1$  i  $B_2$ . Dla różnych wariantów obciążenia operacje te są bardzo podobne. Różnice tkwią jedynie w przeróbkach algebraicznych, zwłaszcza gdy siła  $t(r)$  jest dana dla całej płyty *jedną tylko* funkcją  $r$ , i dlatego operacje te ujęto w postaci tablicy 12.1.

Z podanego w kolumnie pierwszej obrazu płyty i jej obciążenia określamy  $t(r)$  z gotowego równania (12.3), bądź z tegoż warunku sformułowanego od początku. I tak w wariantcie 3 przy danym  $t_a$  i  $p(r) = 0$  mamy od razu z równania (12.3)

$$t(r) = t_a a/r,$$

a w wariantcie 6 z warunku równowagi rzutów sił na oś z

$$t \cdot 2\pi r - P = 0 \quad \text{wynika} \quad t = P/2\pi r.$$

cd. tablicy 12.1

Wynik: $m_r(r), m_t(r), \vartheta(r)$	Wykresy $m_r(r)$ i $m_t(r)$	Obraz ugięcia $w(r)$ i strzałka $f$
$m_r = \frac{3+\nu}{16} pb^2 \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right)$ $m_t = \frac{3+\nu}{16} pb^2 \left( 1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \times \frac{r^2}{b^2} \right)$ $\vartheta = \frac{pb^2 r}{16D} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} - \frac{r^2}{b^2} \right)$		$w = -\frac{pb^4}{64D} \left[ \frac{5+\nu}{1+\nu} - \frac{2(3+\nu)}{1+\nu} \frac{r^2}{b^2} + \frac{r^4}{b^4} \right],$ $f = [(5+\nu)/64(1+\nu)] (pb^4/D)$
$m_r = \frac{P(1+\nu)}{4\pi} \ln \frac{b}{r}$ $m_t = \frac{P(1+\nu)}{4\pi} \left( \ln \frac{b}{r} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right)$ $\vartheta = \frac{Pr}{4\pi D} \left( \ln \frac{b}{r} + \frac{1}{1+\nu} \right)$		$w = -\frac{P}{16\pi D} \left[ \frac{3+\nu}{1+\nu} \times \right.$ $\left. \times (b^2 - r^2) - 2r^2 \ln \frac{b}{r} \right]$ $f = [(3+\nu)/16\pi(1+\nu)] (Pb^2/D)$

Należy tu zauważyć, że sposób podparcia brzegu zewnętrznego nie wpływa na  $t(r)$ , jak w wariantcie 4 i 5, w których siła

$$t(r) = pr/2$$

jest ta sama. Mając  $t(r)$  obliczamy  $F(r)$ . I tak w wariantcie 4 i 6

$$F(r) = \frac{1}{r} \int \left( r \int \frac{pr}{2} \, dr \right) dr = \frac{1}{r} \int r \frac{pr^2}{4} \, dr = \frac{1}{r} \frac{pr^4}{16} = \frac{pr^3}{16},$$

$$F(r) = \frac{1}{r} \int \left( r \int \frac{P \, dr}{2\pi r} \right) dr = \frac{1}{r} \int \frac{Pr}{2\pi} \ln \frac{r}{b} \, dr = \frac{Pr}{8\pi} \left( 2 \ln \frac{r}{b} - 1 \right).$$

W tym ostatnim przypadku wprowadzamy charakterystyczny wymiar  $l = b$  (kolumna trzecia), co ułatwia rachunki nad funkcją logarytmiczną. Tak samo postępujemy i w wariantcie 3.

Aby wyznaczyć stałe  $C$  lub  $B$ , formułujemy dwa niezależne warunki określające na danym brzegu bądź moment  $m_r$ , bądź kąt ugięcia  $\vartheta$ . I tak w wariantcie 2 ze sposobu obciążenia płyty widać, że na brzegach  $r = a$  i  $r = b$  momenty  $m_r$  są

$$(m_r)_{r=a} = 0, \quad (m_r)_{r=b} = m_b,$$



gdzie  $m_b$  — dane obciążenie. Obierając teraz wymiar  $l = a$  i biorąc  $F(r) = 0$ , mamy z zależności (12.8a) dwa równania

$$B_1 - B_2 = 0, \quad B_1 - (B_2 a^2/b^2) = m_b,$$

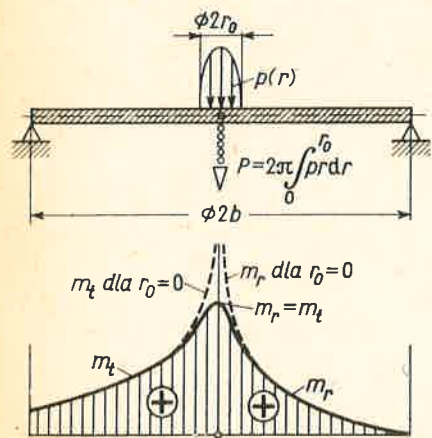
skąd obliczamy stałe  $B$ , a potem z (12.8b) stałe  $C$  jako

$$B_1 = B_2 = m_b b^2/(b^2 - a^2), \quad C_1 = m_b ab^2/D(b^2 - a^2)(1 + \nu), \quad C_2 = \dots$$

Wartości te podstawione z kolei do wyrażeń (12.8a) i (12.7) dają szukane wielkości  $m_t$ ,  $m_r$  i  $\vartheta$  (kolumna piąta). Podobnie postępujemy w pozostałych wariantach 1 i 3 płyt pierścieniowych.

W przypadku płyt pełnych (pozycje 4, 5 i 6) kąt ugięcia  $\vartheta$  w środku płyty oraz funkcja  $(F)_{r=0}$  są równe zero. Z równania (12.7) wynika wtedy  $C_2 = 0$ , a więc i  $B_2 = 0$ . Pozostały warunek dla brzegu  $r = b$  może dotyczyć kąta  $\vartheta$ , jak w pozycji 4, bądź momentu  $m_r$ , jak w pozycji 5 i 6. Wykorzystując odpowiednio zależności (12.7) lub (12.8a) mamy równanie określające stałą  $C_1$  lub  $B_1$ , jak podano w kolumnie czwartej, a stąd i wielkości  $m_r$ ,  $m_t$  i  $\vartheta$ .

Dla większej przejrzystości podajemy zazwyczaj wykresy  $m_t(r)$  i  $m_r(r)$  (kolumna szósta).



Rys. 12.8. Rzeczywisty przebieg  $m_r$  i  $m_t$  na dla obciążenia „skupioną” siłą  $P$

Ich wartości są, jak widać, skończone, z wyjątkiem wariantu 6, gdzie  $(m_r)_{r=0}$  i  $(m_t)_{r=0}$  są nieskończenie wielkie. Ta osobliwość wynika stąd, że w środku płyty siła  $t$  staje się też nieskończenie wielka, co odpowiada przyjętemu modelowi siły skupionej. W rzeczywistości siła działa zawsze na pewną powierzchnię (rys. 12.8) i wtedy wielkości  $m_r$  i  $m_t$  są skończone. O ich wartości decyduje wielkość pola tej powierzchni.

Jak widać, zależności  $m_r(r)$ ,  $m_t(r)$  i  $\vartheta(r)$  dla płyt (pozycja 1, 2 i 5) stają się identyczne z wzorami art. 11.2 dla tarczy, jeśli tylko zamienić odpowiednio

$$\sigma_t, \sigma_r, S_a, S_b, \sigma_p, E,$$

$$m_t, m_r, m_a, m_b, (pb^2/2), D(1 - \nu^2),$$

skąd wynika możliwość wykorzystania analizy z art. 11.2. I tak gdy płytę pełną ( $a = 0$ ) obciążymy momentami  $m_b$ , wówczas z tabl. 12.1 mamy

$$m_t(r) = m_r(r) = m_b = \text{const}, \quad (a)$$

co jest kopią wzoru (f) art. 11.2. Podobnie możemy zbadać koncentrację naprężeń odpowiadającą małemu otworowi środkowemu ( $a \ll b$ ), jak to pokazano na rys. 11.5, itp.

Ostatnim etapem analizy jest obliczenie ugięcia  $w(r)$ , co sprowadza się do scałkowania funkcji  $\vartheta(r) = dw/dr$ , czyli

$$w(r) = \int \vartheta dr + C_3, \quad (12.11)$$

gdzie  $C_3$  — stała określona z warunku podparcia płyty. Biorąc przykładowo płytę (wariant 5) mamy

$$w = \int \frac{pb^2 r}{16D} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} - \frac{r^2}{b^2} \right) dr + C_3 = \frac{pb^4}{32D} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{r^2}{b^2} - \frac{r^4}{2b^4} \right) + C_3.$$

Z oczywistego warunku podparcia  $(w)_{r=b} = 0$  wynika

$$C_3 = -\frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{pb^4}{64D},$$

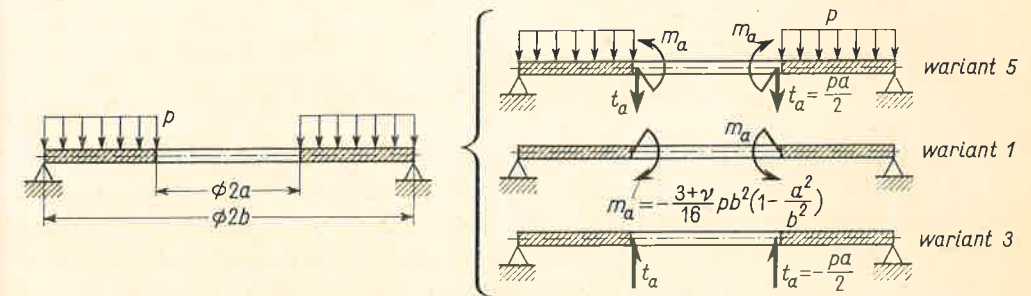
i w rezultacie mamy wyrażenie podane w kolumnie siódmej. Jego ekstremalna absolutna wartość, tzw. *strzałka*  $f$ , jest w środku płyty

$$f = |w|_{\text{ekstr}} = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{pb^4}{64D}. \quad (b)$$

Podobnie postępujemy w pozostałych wariantach. Ponieważ jednak wyrażenia  $w(r)$  są dość złożone, w tablicy podano na ogół tylko strzałki  $f$ , jako najważniejsze w praktycznych zastosowaniach. Jak widać, strzałki te mają wartość skończoną, nawet w wariantcie 6, tj. działania siły skupionej, gdyż dla  $r \rightarrow 0$  jest  $\lim r^2 \ln r = 0$ .

Łącząc podane w tablicy przypadki obciążenia możemy rozwiązać szereg innych zagadnień, jak np. pierścieniową płytę obciążoną ciśnieniem  $p = \text{const}$  (rys. 12.9). Przez wprowadzenie na wewnętrznym brzegu  $r = a$  wydatku  $t_a$  i momentu  $m_a$  o wartościach

$$t_a = pa/2, \quad m_a = (3+\nu)p(b^2 - a^2)/16$$

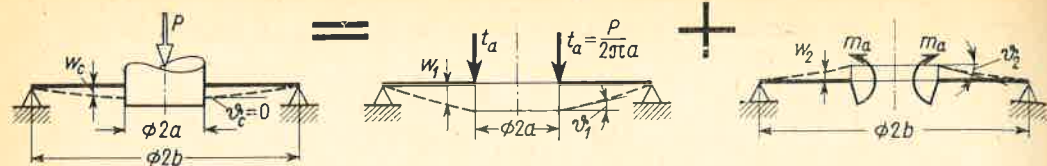


Rys. 12.9. Rozwiązanie płyty przez superpozycję znanych wyników

otrzymujemy obraz jak dla płyty bez otworu (wariant 5), na który nakładamy działanie  $t_a$  i  $m_a$  o zwrotach przeciwnych niż poprzednio. Tak więc badany przypadek jest superpozycją trzech znanych wariantów 5, 1 i 3.

Podobnie superponując warianty 3 i 1 mamy rozwiązanie dla płyty pierścieniowej utwierdzonej na brzegu  $r = a$  i obciążonej siłą  $P$  (rys. 12.10). Ponieważ na tym brzegu całkowity kąt ugięcia  $\vartheta_c = \vartheta_1 + \vartheta_2 = 0$ , zatem biorąc  $t_a = P/2\pi a$  i wykorzystując tabl. 12.1, mamy warunek określający moment  $m_a$

$$\frac{-m_a a^3}{(1-\nu)D(b^2 - a^2)} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{Pa}{4\pi D(1-\nu)} \left( \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) = 0. \quad (c)$$



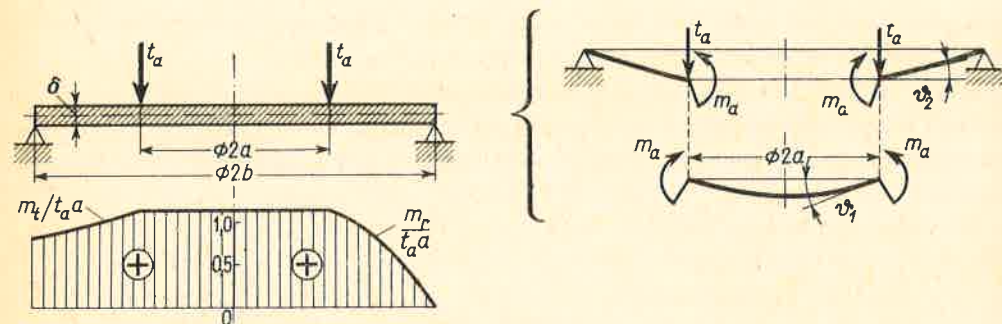
Rys. 12.10. Analiza płyty z utwierdzonym brzegiem wewnętrznym

Obliczona stąd wartość

$$m_a = \frac{P}{4\pi} \frac{2(1+\nu)b^2 \ln(b/a) + (1-\nu)(b^2 - a^2)}{a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)} \text{ Nm/m} \quad (d)$$

umożliwia wyznaczenie odpowiadających temu przypadkowi momentów  $m_r, m_t, w_2$ , które algebraicznie sumujemy z analogicznymi wielkościami  $m_r, m_t$  i  $w_1$  dla przypadku działania  $t_a = P/2\pi a$ .

W bardziej złożonych zadaniach, jak na rys. 12.11, uzyskujemy rozwiązanie przedsta-



Rys. 12.11. Rozwiązanie płyty metodą „zszycia” płyt składowych

wiając płytę jako „zszytą” z dwu lub więcej płyt składowych, między którymi istnieją ogólnie biorąc, oddziaływania w postaci momentów  $m_r$  i wydatków  $t$ . W podanym tu przykładzie wydatek  $t = 0$ , albowiem na części centralnej nie ma obciążenia poprzecznego, istnieje natomiast moment  $m_a$ , jako oddziaływanie części zewnętrznej. Ta ostatnia z kolei obciążona jest znanymi wydatkami  $t_a$  i przeciwnym niż poprzednio momentem  $m_a$ . Jego wartość określimy z warunku ciągłości odkształceń na promieniu  $r = a$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2, \quad (e)$$

gdzie  $\vartheta_1, \vartheta_2$  kąty ugięcia podane na rysunku. Widać, że kąt  $\vartheta_2$  jest taki, jak lewa strona równania (c), z tym że nie jest on teraz równy zeru oraz że  $P = 2\pi t_a a$ . Wartość  $\vartheta_1$  określamy jak w wariancie 2 tabl. 12.1, zmieniając tylko oznaczenia i uwzględniając, że badana tu część centralna nie ma otworu, w wyniku czego mamy

$$\vartheta_1 = m_a a / D(1+\nu). \quad (f)$$

Podstawiając teraz  $\vartheta_1$  i  $\vartheta_2$  do (e) otrzymujemy równanie

$$\frac{m_a a}{D(1+\nu)} = - \frac{m_a a^3}{(1-\nu) D(b^2 - a^2)} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{t_a a^2}{2D(1-\nu)} \left( \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right),$$

z rozwiązania którego mamy szukaną wartość  $m_a$

$$m_a = \frac{t_a a(1+\nu)}{4} \left[ 2 \ln \frac{b}{a} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right], \quad (g)$$

a z superpozycji odpowiednich wykresów przebieg  $m_r$  i  $m_t$ , jak podaje rysunek. Zgodnie z wzorem (a), w części centralnej  $m_r = m_t = \text{const}$  jest równy podanej powyższej wartości  $m_a$ .

Podaną metodę postępowania można uogólnić na przypadki bardziej złożone, jak na rys. 12.2, gdzie płytę należy najpierw podzielić na trzy pierścieniowe części. Uwidocznione przy tym momenty  $m_r$  na krawędziach podziału dobiera się z dwóch warunków ciągłości kąta  $\vartheta$  na tych brzegach. Ponieważ wyniki mają złożoną postać, zaleca się prowadzić rozwiązanie od razu na liczbach szczególnych. Ta sama uwaga dotyczy i wielu innych zagadnień analizy płyt.

**Zadania**

1. Pierścieniową płytę, w której  $b = 2a, \nu = 0,3$ , obciążoną momentami  $m_a$  (wariant 1 w tabl. 12.1) utwierdzono na brzegu  $r = b$ . Jak zmienią się przez to: a) ekstremalne  $\sigma_{red}$ ; b) strzałka ugięcia  $f$ ?

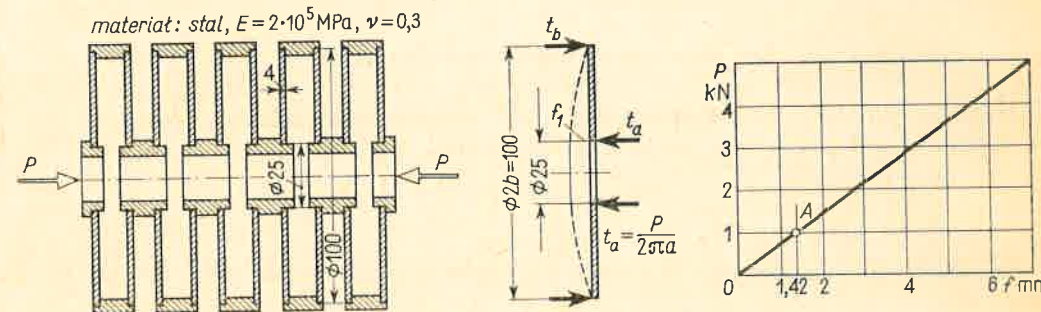
Odp. a. Superponując z tablicy warianty 1 i 2 z warunku, że całkowity kąt  $(\vartheta_c)_{r=b} = 0$ , mamy

$$m_b = 2m_a / [(1-\nu)(b/a)^2 + (1+\nu)]$$

i dla  $a/b = 0,5$  i  $\nu = 0,3$  jest  $m_b = 0,488 m_a$ . Niebezpiecznym miejscem jest brzeg  $r = a$ , gdzie wypadkowe momenty  $m_r = m_a, m_t = -0,366 m_a$  i według (12.10)  $(\sigma_{red})_{ekstr} = 7,35 (m_a/\delta^2)$ . Jest to  $\sim 1,9$  razy mniej niż w wariancie 1.

b. Strzałka ugięcia maleje  $\sim 5,5$  razy.

2. Wyznaczyć charakterystykę  $P(f)$  sprężyny talerzowej (rys. 12.12). Jaką maksymalną siłę można przyłożyć, jeśli  $k_r = 700 \text{ MPa}$ ?



Rys. 12.12. Analiza sprężyny talerzowej

Odp. Obraz obciążenia pojedynczego talerza jest jak w wariancie 3 z tabl. 12.1. Wykorzystując podane tam wyniki i biorąc  $P = 1 \text{ kN}, D = E\delta^3/12(1-\nu^2) = 1170 \text{ Nm}, b = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}, a = b/4$ , otrzymujemy dla pojedynczego talerza strzałkę  $f_1 = 0,142 \text{ mm}$ , a dla całej sprężyny o 10 talerzach  $f = 10 f_1 = 1,42 \text{ mm}$ . Informacja ta określa punkt A i wystarcza do zrobienia wykresu  $P(f)$ . Niebezpiecznym miejscem jest brzeg  $r = a$ , gdzie  $m_r = 0$ , a  $m_t = 0,366P$  i z wzoru (12.10)

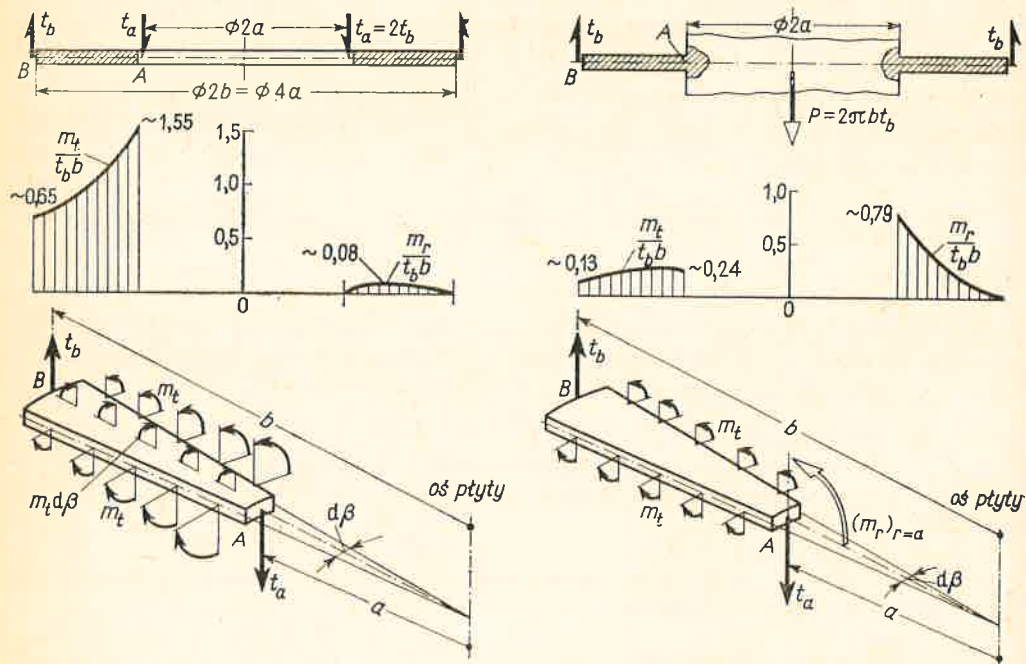
$$6(m_t)_{r=a}/\delta^2 = \sigma_{red} = k_r, \quad \text{skąd} \quad P = 5150 \text{ N} \approx 525 \text{ kG}.$$



3. Jak zmieni się przebieg  $m_t(r)$  i  $m_r(r)$  w płycie (wariant 3 w tabelcy,  $b/a = 2, \nu = 0,3$ ), gdy utwierdzimy brzeg  $r = a$  (rys. 12.10).

Odp. Wyniki obliczeń podaje rys. 12.13. Jak widać, modyfikacja ta zmienia radykalnie wartości  $m_t$  i  $m_r$  oraz sposób pracy. Sens tego stanie się jasny, gdy zbadać równowagę klina  $AB$ . Przed modyfikacją działanie dużego momentu pary sił  $t_a a d\beta = t_b b d\beta$  równoważy suma wypadkowych momentów o natężeniu  $m_t d\beta$ , którego średnia wartość

$$(m_t)_{\text{średnie}} d\beta (b-a) = (t_b b d\beta) (b-a) \quad \text{lub} \quad (m_t)_{\text{średnie}} = t_b b,$$



Rys. 12.13. Analiza pracy płyt pierścieniowych

co potwierdza wykres  $m_r(r)$ . Po modyfikacji główną rolę w zrównoważeniu momentu  $(t_b b d\beta) (b-a)$  spełnia moment utwierdzenia  $m_t a d\beta$ , wobec czego jego wartość jest rzędu

$$(m_t)_{r=a} \approx t_b b (b-a)/a$$

i gdy  $b = 2a$ , wówczas  $(m_t)_{r=a} \approx t_b b$ , jak podaje wykres.

Powyższe uwagi mają praktyczne znaczenie przy szacunkowej ocenie różnych wariantów płyt pierścieniowych.

4. Na pierścieniową płytę o małej szerokości ( $b-a \ll b$ ) działają kolejno obciążenia (rys. 12.14), mające to samo natężenie momentu na jednostkę długości obwodu koła o promieniu  $r_c = \sqrt{ab}$ , czyli

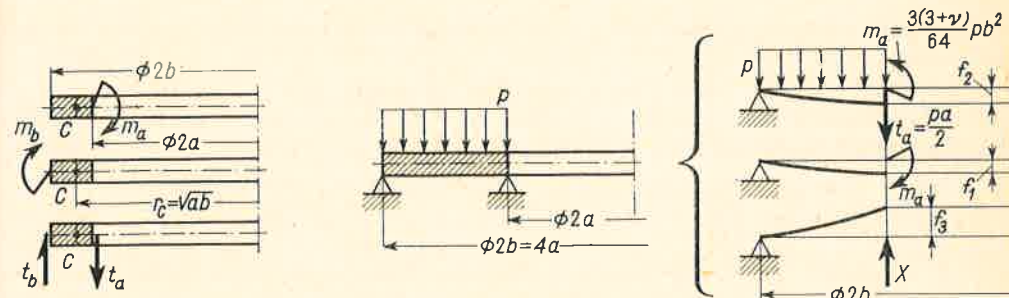
$$m_a a/r_c = m_b b/r_c = t_a a (b-a)/r_c = m_0.$$

Udowodnić, że w tych wszystkich przypadkach naprężenia i średni kąt ugięcia  $\vartheta_{sr}$  są z techniczną dokładnością równe.

Odp. Wykorzystując rozumowanie z zadania 3, mamy od razu, że średnia wartość  $(m_t)_{sr} = m_0 r_c/(b-a)$  jest ta sama, a wartości  $m_r$  są rzędu  $m_0$ , czyli  $m_r \ll m_t$ , skąd wynika, że dominujące

są naprężenia  $\sigma_r$ , a  $\sigma_t$  są pomijalne. Kąt  $\vartheta_{sr}$  obliczamy z zależności wynikającej z wzorów (12.4)

$$\vartheta_{sr} = \frac{(m_t - \nu m_r) r_c}{D(1-\nu^2)} \approx \frac{m_t r_c}{D(1-\nu^2)} \approx \frac{m_0 ab}{D(b-a)(1-\nu^2)}.$$



Rys. 12.14. Do zadania 4

Rys. 12.15. Do zadania 5

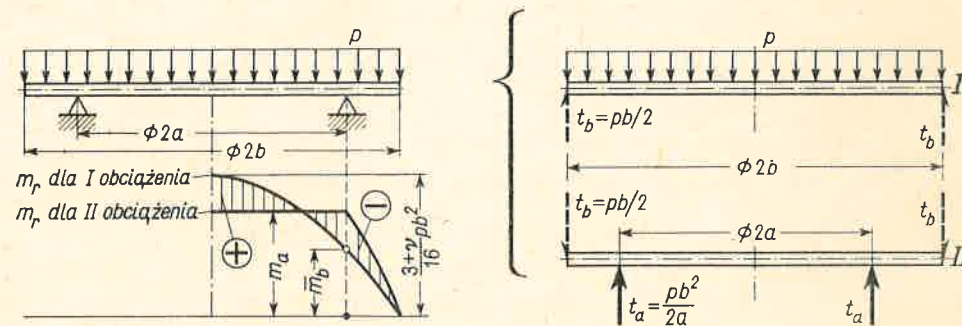
5. Pierścieniową płytę, w której  $b = 2a$ , opartą na obydwóch brzegach, obciążono ciśnieniem  $p$  (rys. 12.15). Wyznaczyć reakcje podpór.

Odp. Po usunięciu podparcia brzegu wewnętrznego rozkładamy obciążenie na trzy części. Pierwsza odpowiada (rys. 12.9) wariantowi 5 tabl. 12.1, pozostałe są identyczne z wariantami 1 i 3 tabelcy. Nieznany wydatek  $X$  (N/m) wyznaczamy z warunku

$$|f_1| + |f_2| = |f_3|$$

i po wykorzystaniu informacji z tabelcy mamy  $X = 0,642pb$ . Całkowita reakcja na brzegu wewnętrznym jest  $X - t_a = 0,392pb$ , a na zewnętrznym  $t_b = [p(b^2 - a^2)/2b] - [(X - t_a)a/b] = 0,179pb$ .

6. W płycie obciążonej ciśnieniem  $p$  (rys. 12.16) określić promień  $a$  kołowej podpory, aby ekstremalny moment  $m_r$  był najmniejszy.



Rys. 12.16. Dobór optymalnej średnicy podparcia

Rozwiązanie. Po wprowadzeniu dwóch przeciwnych wydatków  $t_b$  rozdzielamy zadanie na dwa, a mianowicie: wariant 5 tabelcy i przypadek z rys. 12.11. Po złożeniu wykresów  $m_r$  widać, że w centralnej części płyty ekstremalny  $m_r$  jest dodatni i wynosi

$$[(3+\nu)pb^2/16] - m_a > 0,$$

gdzie  $m_a$  dane jest wzorem (g). W części zewnętrznej  $m_r < 0$  ma ekstremalną wartość dla  $r = a$

$$m_b - m_a = [(3+\nu)p(b^2 - a^2)/16] - m_a < 0.$$

Optymalny przypadek jest, gdy obydwa powyższe momenty mają równe bezwzględne wartości, skąd

$$m_a = \frac{3+\nu}{32} pb^2 \left( 2 - \frac{a^2}{b^2} \right).$$

Wstawiając za  $m_a$  wyrażenie (g), w którym  $t_a = pb^2/2a$ , mamy po przekształceniach równanie określające stosunek  $\xi = a/b$

$$-8(1+\nu) \ln \xi + (5\nu-1) \xi^2 = 2(1+3\nu),$$

którego rozwiązanie dla  $\nu = 0,3$  jest  $\xi \approx 0,817$ , a

$$(m_r)_{\text{ekstr}} = \frac{3+\nu}{16} pb^2 - \frac{pb^2(1+\nu)}{8} \left[ 2 \ln \frac{b}{a} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right] \approx 0,052 pb^2.$$

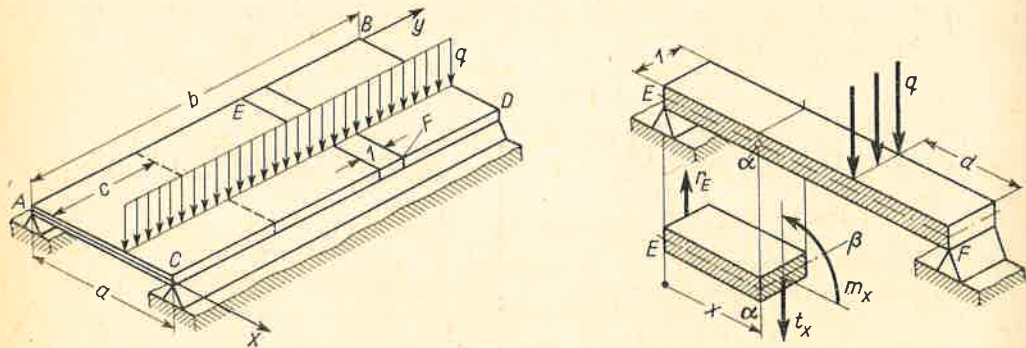
Wartość powyższa jest  $\sim 4$  razy mniejsza niż w przypadku podparcia na brzegu zewnętrznym.

7. Dwie płyty: stalowa i miedziana, o jednakowych wymiarach i sposobie podparcia są tak samo obciążone. W której z nich są większe: a) naprężenia, b) ugięcia, jeśli  $E_{\text{Cu}}/E_{\text{Fe}} = 0,5$ ?

Odp. a) jeśli pominąć różnice  $\nu$ , to naprężenia są równe; b)  $(w)_{\text{Cu}} = 2(w)_{\text{Fe}}$ .

### 12.3. Niektóre przypadki zginania płyt prostokątnych

Rozważmy wydłużoną prostokątną płytę opartą lub utwierdzoną na dłuższych bokach  $AB$  i  $CD$  przy obciążeniu nie zmieniającym się wzdłuż długości płyty (rys. 12.17). W takich warunkach, jak uczy doświadczenie, część płyty dostatecznie odległa od krótszych



Rys. 12.17. Cylindryczne zgięcie płyty prostokątnej

boków  $AC$  i  $BD$  zgina się według powierzchni walcowej, której oś jest równoległa do osi  $y$ . Każdy zatem jednostkowy pasek  $EF$  równoległy do osi  $x$  zgina się jednakowo, a jego przekrój poprzeczny  $\alpha$  zostaje prostokątem. Wynika stąd, że na wzdłużnych bokach paska nie ma naprężeń stycznych, a warunki równowagi rzutów sił na oś  $z$  i momentów względem osi  $\alpha\beta$  są dla części  $Ea$  takie same jak w przypadku belki o tych samych wymiarach i tak samo obciążonej. Przy podanym przykładowo obciążeniu mamy więc reakcję  $r_E = qd/a$  N/m, a w przekroju  $\alpha$  wysiłek o składowych

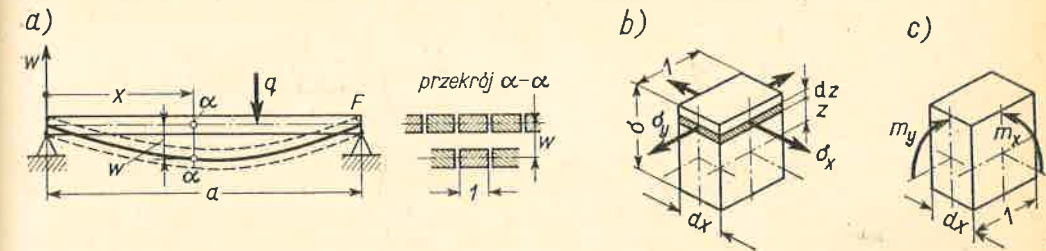
$$t_x = r_E \text{ N/m}, \quad m_x = r_E x = qxd/a \text{ N/m}^2$$

odniesionych do jednostki szerokości badanego paska. Odpowiadające temu wysiłkowi naprężenia w przekroju  $\alpha$  obliczamy, jak dla belki o wymiarach poprzecznych  $1 \times \delta$ . Zgodnie więc z wzorem (5.14) naprężenia normalne  $\sigma_x$  w kierunku osi  $x$  są

$$\sigma_x = -\frac{12m_x z}{\delta^3}, \quad (\sigma_x)_{\text{ekstr}} = \pm \frac{6m_x}{\delta^2}, \quad (a)$$

gdzie  $z$  — odległość badanej warstwy od płaszczyzny środkowej. Naprężenia styczne wyznaczamy z wzoru (5.18). Podobnie jednak jak w belkach są one małe, a ich rola jest pomijalna.

Opisane podobieństwa nie oznaczają identyczności obrazów naprężeń i odkształceń w belce i w zginanej cylindrycznie płycie. Skoro bowiem poprzeczne przekroje pasków płyty zostają po zgięciu prostokątne (rys. 12.18a), to ich odkształcenia w kierunku osi  $y$ ,



Rys. 12.18. Obraz odkształceń i naprężeń przy zgięciu cylindrycznym

czyli  $\epsilon_y$ , muszą być równe zero. Aby tak było, na wzdłużnych bokach paska muszą działać zmienne liniowo wzdłuż grubości naprężenia  $\sigma_y$ . Jeśli bowiem każda elementarna warstwa w wyciętym myślowo odcinku paska (rys. 12.18b) ma  $\epsilon_y = 0$ , to według zależności (7.18) musi być

$$\epsilon_y = 0 = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E,$$

skąd

$$\sigma_y = -\nu\sigma_x = -12\nu m_x z / \delta^3. \quad (b)$$

Łatwo zauważyć, że naprężenia  $\sigma_y$  dają wypadkowy moment

$$m_y = \nu m_x \text{ Nm/m}. \quad (c)$$

W odróżnieniu zatem od belki, przy cylindrycznym zgięciu płyty każdy element warstwy pracuje w dwuwymiarowym stanie naprężenia. Ma to wpływ na naprężenia zredukowane, których ekstremalną wartość obliczamy z wzoru (12.10) otrzymując

$$(\sigma_{\text{red}})_{\text{ekstr}} = (6 m_x / \delta^2) \sqrt{1 - \nu + \nu^2}. \quad (d)$$

Istnienie naprężeń  $\sigma_y$  wpływa również na odkształcenie warstwy w kierunku osi  $x$ , gdyż zgodnie z wzorem (7.18)

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{\sigma_x}{E} (1 - \nu^2) = -\frac{12(1 - \nu^2) m_x z}{E \delta^3}. \quad (e)$$

Jak widać, odkształcenie  $\epsilon_x$  w pasku płyty jest takie jak odkształcenie włókna w identycznej belce, której moduł sprężystości nie jest  $E$ , lecz  $E/(1 - \nu^2)$ . Wszystkie zatem odkształcenia



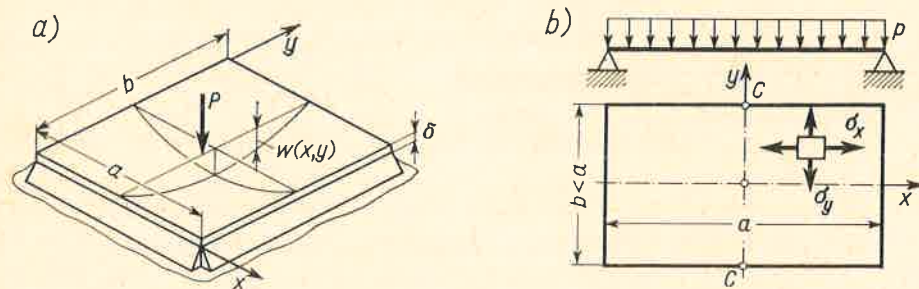
paska płyty, jak ugięcia, kąty ugięcia, są w porównaniu z belką w tymże stosunku zmniejszone, co można interpretować jako wzrost sztywności  $EJ_y = E\delta^3/12$  belki na

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \text{ Nm/m}^2$$

dla paska cylindrycznie zginanej płyty. Wielkość  $D$  jest znana już z art. 12.1 sztywnością płytową.

Jak wynika z teorii płyt, wpływ podparcia krótszych boków zaznacza się wyraźnie na długości  $c \approx a$  (rys. 12.17). Wynika stąd, że sformułowane powyżej zależności obowiązują, gdy  $b > 3a$ .

Gdy gabarytowe wymiary  $a$  i  $b$  są zbliżone lub gdy obciążenie jest funkcją  $x$  i  $y$  (rys. 12.19a), wówczas zadanie określenia powierzchni ugięcia  $w(x, y)$  i naprężeń jest



Rys. 12.19. Oznaczenia dla płyt prostokątnych

bardziej złożone, gdyż sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych, wynikiem czego jest odpowiedź z reguły w postaci szeregów. Z tych powodów nie wnikając głębiej w to zagadnienie, podamy od razu wartości momentów  $m_x$  i  $m_y$  w niebezpiecznym miejscu płyty oraz jej strzałkę ugięcia  $f$  dla przypadku obciążenia ciśnieniem  $p = \text{const}$  (rys. 12.19b). Wyniki te są

$$m_x = \mu_x p b^2, \quad m_y = \mu_y p b^2, \quad f = |w|_{\text{max}} = \psi p b^4 / E \delta^3, \quad (f)$$

gdzie  $b$  — długość krótszego boku, a  $\mu_x, \mu_y, \psi$  współczynniki zależne od stosunku  $a/b$  i sposobu podparcia płyty podano w tabl. 12.2 biorąc  $\nu = 0,3$ . Należy nadmienić, że w płycie podparcie na brzegach niebezpiecznym miejscem jest jej środek, a gdy brzegi są utwierdzone, jest nim środek  $C$  dłuższego brzegu. W obydwóch przypadkach ugięcie  $f$  jest w środku płyty.

### Zadania

1. Określić współczynnik bezpieczeństwa i strzałkę ugięcia długiej stalowej płyty (rys. 12.17), jeśli  $q = 20 \text{ kN/m}$ ,  $d = a/2 = 20 \text{ cm}$ ,  $\delta = 1 \text{ cm}$ ,  $R_c = 240 \text{ MPa}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$ .

Odp.  $(m_x)_{\text{max}} = 2 \text{ kNm/m}$ ,  $\sigma_x = 6m_x/\delta^2 = 120 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = 36 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{\text{red}} \approx 107 \text{ MPa}$  i  $n_e = R_c/\sigma_{\text{red}} \approx 2,25$ . Z wzoru (5.30), w którym zamiast  $EJ_y$  wstawimy  $D = 1,83 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2/\text{m}$ ,

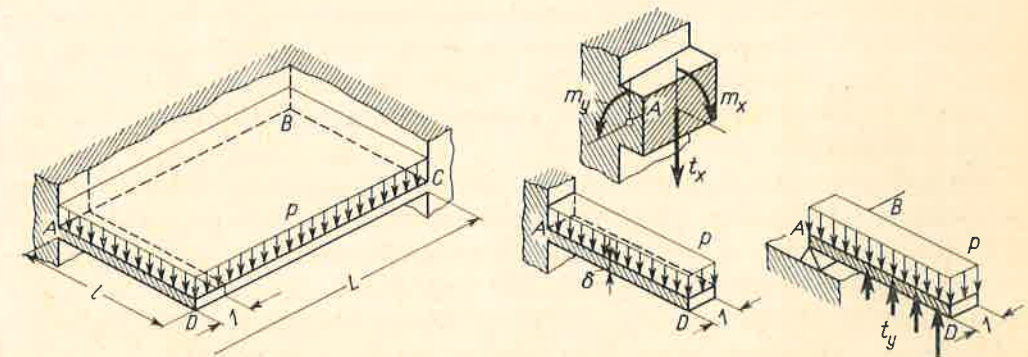
$$f = qa^2/48D = 20 \cdot 10^3 \cdot 0,4^3/48 \cdot 1,83 \cdot 10^4 = 1,46 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,46 \text{ mm}.$$

Tablica 12.2

a/b	Brzegi podparte przegubowo			Brzegi utwierdzone		
	$\mu_x$	$\mu_y$	$\psi$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\psi$
1,0	0,0479	0,0479	0,0443	$\mu_x = \mu_y$	0,0513	0,0138
1,5	0,0498	0,0812	0,0844		0,0757	0,0240
2,0	0,0464	0,1017	0,1106		0,0829	0,0277
3,0	0,0406	0,1189	0,1336		0,0831	0,0280
4,0	0,0384	0,1235	0,1416		0,0832	0,0281
$\infty$	0,0375	0,1250	0,1422		0,0833	0,0284

2. Jak zmieniają się wyniki zadania 1, gdy obydwa wzdłużne brzegi  $AB$  i  $CD$  zostaną utwierdzone? Odp.  $(m_x)_{\text{ekstr}} = qa/8$  (art. 10.3),  $f = qa^3/192D$  (zadanie 1 art. 10.7), a więc współczynnik bezpieczeństwa wzrasta dwukrotnie, a strzałka ugięcia maleje czterokrotnie.

3. Jak zmieni się schemat pracy długiej płyty (rys. 12.20) utwierdzonej na brzegu  $AB$ , swobodnej na  $CD$  i obciążonej ciśnieniem  $p = \text{const}$ , jeśli utwierdzenie brzegu  $AB$  zastąpić podporą przegubową?



Rys. 12.20. Stosowalność schematu zgięcia cylindrycznego płyty

Odp. W wersji pierwotnej spełnione są warunki cylindrycznego zgięcia i każdy jednostkowy pasek pracuje jak wspornik, w którym ekstremalne momenty są w przekroju  $A$  i wynoszą

$$m_x = pl^2/2, \quad m_y = \nu m_x = \nu pl^2/2.$$

Po modyfikacji zgięcie nie może być cylindryczne, gdyż reakcja podpory  $A$  nie zapewnia dla jednostkowego paska równowagi momentów względem osi  $AB$ . Na bokach wzdłużnych, jak  $AD$ , muszą istnieć siły tnące  $t_y$ , a to przeczy schematowi cylindrycznego zgięcia.

4. Obliczyć współczynnik bezpieczeństwa kwadratowej  $a = b = 50 \text{ cm}$  płyty podłogowej utwierdzonej na czterech brzegach przy ciśnieniu

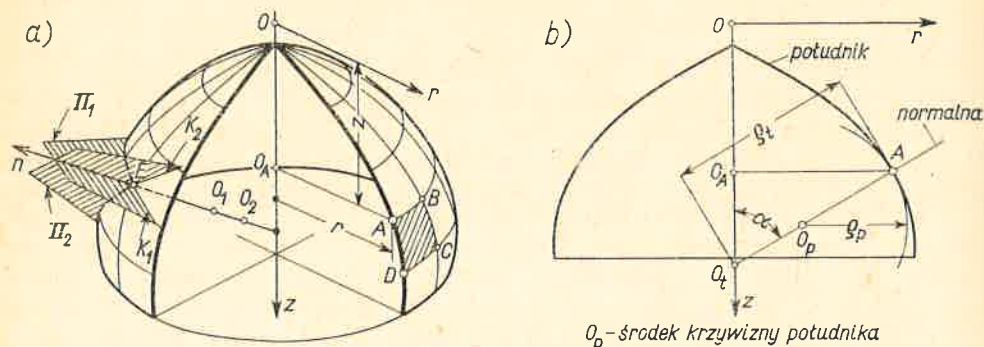
$$p = 5 \text{ kN/m}^2, \quad \text{jeśli } R_c = 240 \text{ MPa}, \quad \delta = 1,5 \text{ mm}.$$

Odp. Z tablicy 12.2 jest  $m_y = 64,1 \text{ Nm/m}$ ,  $m_x = 19,2 \text{ Nm/m}$  i z wzoru (12.10) mamy  $\sigma_{\text{red}} = ((6/\delta^2) \sqrt{m_x^2 - m_x m_y + m_y^2}) = 152 \text{ MPa}$ , a  $n_e \approx 1,6$ .



### 12.4. Błonowy stan napięcia w osiowosymetrycznych powłokach

Geometrię powłoki takiej opisujemy podając kształt  $r(z)$  przekroju południkowego powierzchni środkowej, w skrócie południka, oraz grubość ścianki  $\delta$  (rys. 12.21). Do tego opisu należy także pojęcie *głównych promieni krzywizny*<sup>(1)</sup>, którymi dla powłoki osio-

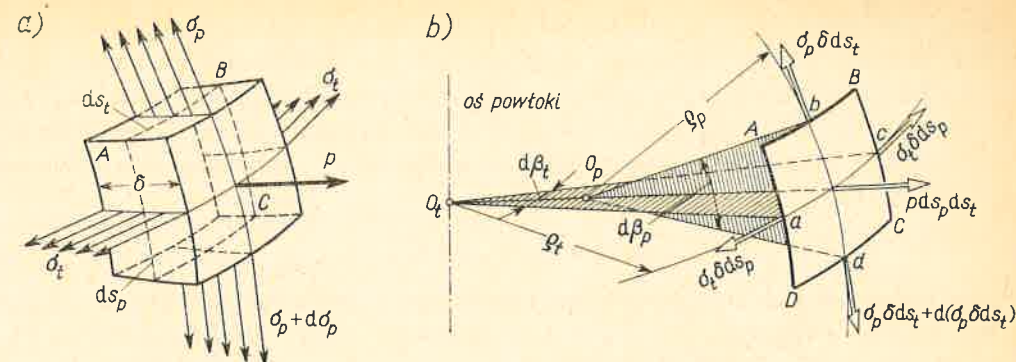


Rys. 12.21. Geometria i oznaczenia powłoki osiowosymetrycznej

wosymetrycznej są: promień krzywizny  $\varrho_p$  południka w badanym punkcie  $A$  oraz promień  $\varrho_t$  przekroju powierzchni środkowej płaszczyzną normalną do tej powierzchni, a jednocześnie prostopadłą do płaszczyzny południka. W geometrii różniczkowej dowodzi się, że  $\varrho_t$  jest równy odcinkowi normalnej  $\overline{AO_t}$  między powierzchnią a osią  $Oz$  powłoki. Na ogół te promienie  $\varrho_p$  i  $\varrho_t$  są funkcjami współrzędnej  $z$  określającej położenie badanego punktu  $A$  powłoki.

Analizę wytrzymałościową rozpoczniemy od opisu obrazu naprężeń działających na boki elementu  $ABCD$  wyciętego przekrojami: południkowymi  $AD$  i  $BC$  oraz stożkowymi  $AB$  i  $DC$  (rys. 12.22a). Przy osiowosymetrycznym obciążeniu ciśnieniem  $p$  powstają naprężenia południkowe  $\sigma_p$  i obwodowe  $\sigma_t$ , które z racji osiowej symetrii ustroju są główne. Jeśli powłoka jest cienka, a ciśnienie  $p$  łagodnie zmienne lub stałe, to można założyć, że wzdłuż grubości naprężenia  $\sigma_p$  i  $\sigma_t$  są stałe natomiast, tak jak i  $p$ , mogą być one funkcjami  $z$ . Wypadkowe siły na bokach elementu (rys. 12.22b) są równe iloczynom wartości  $\sigma$  przez odpowiednie pola. I tak na bokach  $AD$  i  $BC$  mamy siły  $\sigma_t \delta ds_p$  leżące w płaszczyźnie  $O_tac$  i tworzące ze sobą kąt  $d\beta_t = ds_t/\varrho_t$ . Podobnie na boku  $AB$  działa siła  $\sigma_p \delta ds_t$ , a na  $DC$  zwiększona o pewien przyrost siła  $\sigma_p \delta ds_p + d(\sigma_p \delta ds_p)$  leżące w płaszczyźnie południka  $O_pbd$  i tworzące ze sobą kąt  $d\beta_p = ds_p/\varrho_p$ . Rzutując na normalną  $n$  te wszystkie siły

<sup>(1)</sup> Jeśli przez normalną  $n$  w punkcie  $E$  przesunąć szereg płaszczyzn  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ , to otrzymujemy szereg różnych krzywych przecięcia  $K_1, K_2, \dots$ . Każdej z nich odpowiada inne koło krzywizny, z tym że środki  $O_1, O_2, \dots$  tych kół leżą na normalnej  $n$ . W całej mnogości promieni krzywizny  $\varrho_1, \varrho_2, \dots$  jeden  $\varrho_{\max}$  jest maksymalny, drugi  $\varrho_{\min}$  — minimalny. Odpowiadające tym *głównym promieniom*  $\varrho_{\max}$  i  $\varrho_{\min}$  płaszczyzny  $\Pi$  są do siebie prostopadłe (patrz W.I. Smirnow, *Matematyka wyższa*, t.2, Warszawa 1960, PWN).



Rys. 12.22. Obraz naprężeń w elemencie powłoki

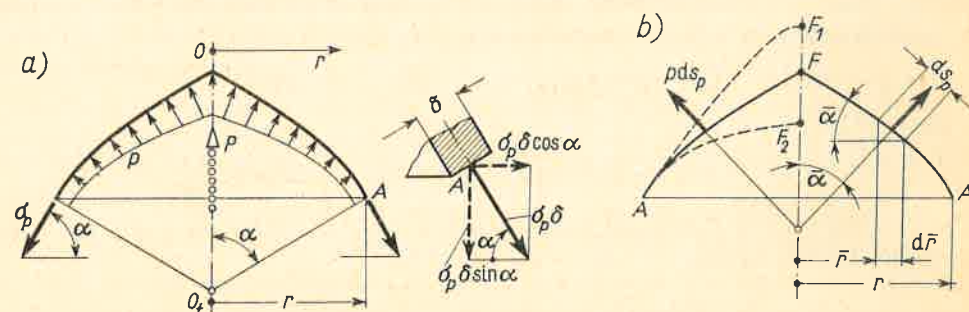
łącznie z obciążeniem zewnętrznym  $p ds_p ds_t$  otrzymujemy po zaniedbaniu małych trzeciego rzędu warunek równowagi

$$-(\sigma_p \delta ds_t)(ds_p/\varrho_p) - (\sigma_t \delta ds_p)(ds_t/\varrho_t) + p ds_p ds_t = 0,$$

przybierający po przekształceniu postać tzw. *równania Laplace'a*

$$\frac{\sigma_p}{\varrho_p} + \frac{\sigma_t}{\varrho_t} = \frac{p}{\delta}. \quad (12.12a)$$

Poza powyższym można sformułować dla elementu  $ABCD$  także warunek równowagi rzutów sił na oś powłoki. Prościej jednak zrobić to nie dla elementu, lecz dla skończonej



Rys. 12.23. Równowaga skończonego odcinka powłoki

części powłoki odciętej równoleżnikiem (rys. 12.23a). Jeśli bowiem  $P$  jest wypadkową obciążenia działającego na całą tę część, to

$$\sigma_p \delta \sin \alpha \cdot 2\pi r = P. \quad (12.12b)$$

Wartość  $P$  zależy od rodzaju obciążenia. W często spotykanym przypadku, gdy  $p = \text{const}$ , mamy według rys. 12.23b

$$P = \int_0^r (p ds_p \cos \bar{\alpha}) 2\pi \bar{r} = 2\pi p \int_0^r \bar{r} d\bar{r} = p\pi r^2, \quad (a)$$

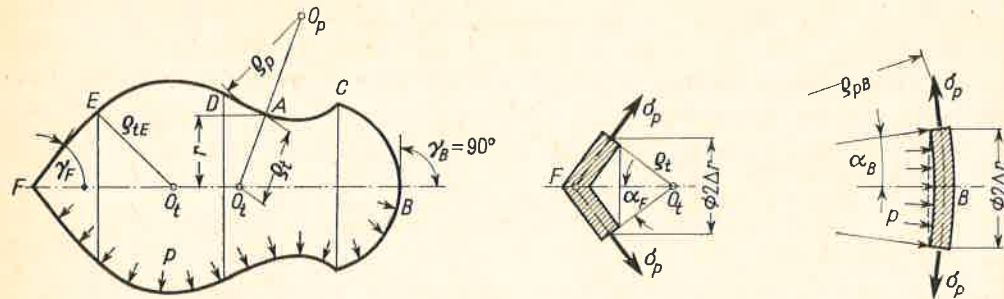
a więc siła  $P$  jest równa iloczynowi ciśnienia  $p$  przez pole równoleżnika  $A-A$  i nie zależy od kształtu południka  $AF$ .



Poza naprężeniami  $\sigma_p$  i  $\sigma_t$  obliczonymi z równań (12.12) między elementarnymi warstwami płaszczy działają naprężenia  $\sigma_3$  prostopadle do powierzchni środkowej. Zauważmy jednak, że wartości  $\sigma_3$  są rzędu  $p$  i są całkowicie pomijalne w porównaniu z  $\sigma_p$  i  $\sigma_t$ , które według (12.12a) są rzędu  $p \varrho_p / \delta$  lub  $p \varrho_t / \delta$ . Z tego powodu w ocenie bezpieczeństwa traktujemy stan napięcia jako dwuwymiarowy, a wartość  $\sigma_{red}$  obliczamy wykorzystując wzór (11.12), czyli

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p \sigma_t + \sigma_t^2}. \quad (b)$$

Gdy badany odcinek  $DAC$  powłoki jest wklęsły (rys. 12.24), wówczas zależności (12.12) zostają te same, z tym tylko, że  $\varrho_p < 0$ . Gdy powłoka ma ostry wierzchołek (punkt  $F$ ),



Rys. 12.24. Analiza niektórych szczegółów w powłoce

wówczas w jego otoczeniu naprężenia  $\sigma_p$  i  $\sigma_t$  odpowiadające działaniu ciśnienia  $p$  są równe zero, albowiem  $P = \pi \Delta r^2 p$  i z wzoru (12.12b)

$$\sigma_p = p \Delta r / 2 \delta \sin \alpha_F \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad \Delta r \rightarrow 0,$$

a z wzoru (12.12a)

$$\sigma_t = p \varrho_t / \delta = p \Delta r / \delta \sin \alpha_F \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad \Delta r \rightarrow 0.$$

W gładkim wierzchołku  $B$  sytuacja jest inna, albowiem  $P = \pi \Delta r^2 p$ ,  $\alpha_B = \Delta r / \varrho_{pB}$  i wtedy z zależności (12.12) wynika

$$\sigma_p = p \varrho_{pB} / 2 \delta, \quad \sigma_t = p \varrho_{tB} / 2 \delta = p \varrho_{pB} / 2 \delta = \sigma_p,$$

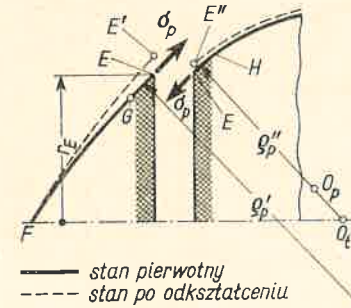
gdyż w otoczeniu punktu  $B$  promienie krzywizny  $\varrho_{pB}$  i  $\varrho_{tB}$  są równe.

Przedstawiony układ naprężeń nazywamy *blonowym*, albowiem odpowiada on powłoce (blonie), której płaszcz jest idealnie giętki. Oddaje on bardzo dobrze warunki pracy rzeczywistych powłok, których płaszcz ma zawsze pewną sztywność na zginanie, jeśli tylko wynikające z niego wnioski nie są sprzeczne z fizycznym obrazem zjawisk. Sprzeczności te występują na ogół w miejscach nieciągłości kształtu południka: jawnych, jak załom  $C$  na rys. 12.24, lub ukrytych, jak punkty  $E$  i  $D$ , gdzie występują przeskoki promieni  $\varrho_p$ . I tak w punkcie  $E$  (rys. 12.25) przeskok z  $\varrho_p'$  na  $\varrho_p''$  powoduje przeskok wartości  $\sigma_t$  oraz odkształceń obwodowych  $\epsilon_t$ , a to z kolei sprawia, że przyrosty promienia  $r_E$ , czyli  $EE'$  i  $EE''$ , są *różne*. Ponieważ w rzeczywistości takiej nieciągłości odkształceń nie ma, stąd wynika

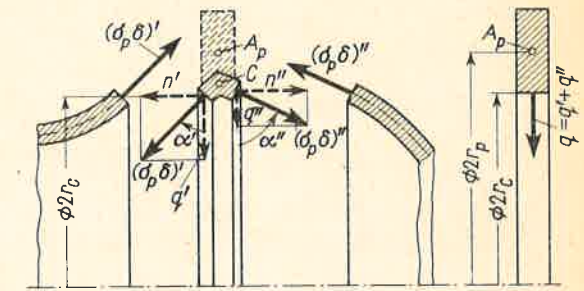
zatem, że w miejscu złączenia  $E$  musi wystąpić stan napięcia odmienny od blonowego. Badania teoretyczne wykazały, że to zaburzenie stanu blonowego ma wybitnie lokalny charakter i obejmuje strefę, której szerokość  $a = EG = EH$  jest rzędu

$$a \approx \sqrt{r_E \delta} |\varrho_p' - \varrho_p''| / (|\varrho_p'| + |\varrho_p''|)$$

i maleje wraz z różnicą promieni  $\varrho_p' - \varrho_p''$ .



Rys. 12.25. Nieciągłość odkształceń przy przeskoku  $\varrho_p$



Rys. 12.26. Statyka załomu i pierścienia wzmacniającego

Z kolei zbadajmy sytuację w załomie  $C$  (rys. 12.26). W tym celu rozcinamy powłokę na trzy części: lewą, prawą i środkowy cienki pierścień  $C$  uwidaczniając przy tym oddziaływanie, których natężenie na jednostkę długości obwodu  $(\sigma_p \delta)'$  i  $(\sigma_p \delta)''$  obliczono z wzoru (12.12b), czyli przy założeniu blonowego stanu napięcia. Zauważmy, że składowe  $n'$  i  $n''$  są według (12.12b)

$$n' = n'' = P / 2\pi r_c \quad (c)$$

i ich działanie na pierścień znosi się. Pozostaje natomiast wypadkowe obciążenie promieniowe o natężeniu

$$q = q' + q'' = n' \operatorname{ctg} \alpha' + n'' \operatorname{ctg} \alpha'' = (P / 2\pi r_c) (\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha''), \quad (d)$$

powodujące ściskanie pierścienia w kierunku obwodowym. Dla utrzymania tych ścisających naprężeń  $\sigma_c$  w rozsądnych granicach musimy pierścień wzmocnić dając mu pole przekroju  $A_p$  i wtedy zgodnie z wzorem (2.5) wartość

$$\sigma_c \approx q r_c / A_p. \quad (e)$$

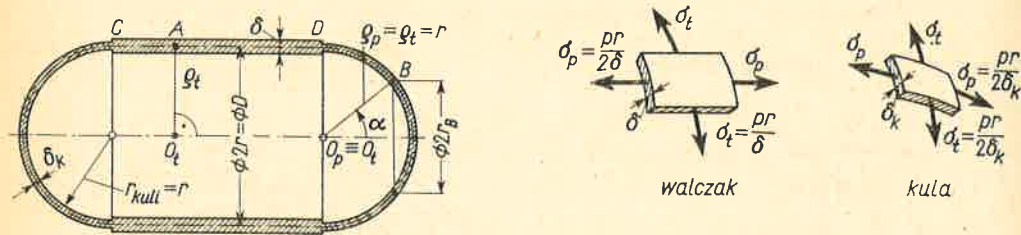
Wprowadzenie pierścienia wzmacniającego załom umożliwia grę sił odpowiadającą stanowi blonowemu, nie likwiduje jednak nieciągłości odkształceń i związanego z tym zaburzenia rozkładu naprężeń, jak opisywano poprzednio. To ostatnie zaburzenie, wyrażone wzrostem naprężeń, jest rzędu naprężeń blonowych, podczas gdy zaburzenie, które by wystąpiło w załomie niewzmocnionym, wyrażałoby się wzrostem naprężeń rzędu

$$(p r_c / \delta) \sqrt{r_c / \delta}, \quad (f)$$

a więc wielokrotnie większym.

Zadania

1. Wyznaczyć wartości  $\sigma_p$  i  $\sigma_t$  w zbiorniku złożonym z walczaka  $CD$  i półkulistych den (rys. 12.27) wywołanych ciśnieniem  $p$ .



Rys. 12.27. Analiza powłoki walcowej i kulistej

Rozwiązanie. Południk walczaka  $CAD$  jest prostą równoległą do osi, wobec czego promienie:  $\varrho_p = \infty$ ,  $\varrho_t = r$ , a kąt  $\alpha = 90^\circ$ . Podstawiając te dane do równań (12.12) mamy

$$\sigma_p = \frac{\pi r^2 p}{2\pi r \cdot 1 \cdot \delta} = \frac{pr}{2\delta} = \frac{pD}{4\delta}, \quad \sigma_t = \frac{p\varrho_t}{\delta} = \frac{pr}{\delta} = \frac{pD}{2\delta}$$

Dla kulistego dna mamy  $\varrho_p = \varrho_t = r = \text{const}$ , a w dowolnym punkcie  $B$  jest  $\sin \alpha = r_B/r$ , wobec czego z równań (12.12)

$$\sigma_p = \frac{\pi r_B^2 p}{2\pi r_B \delta_k \sin \alpha} = \frac{pr}{2\delta_k}, \quad \sigma_t = \frac{p\varrho_t}{\delta_k} - \frac{\sigma_p \varrho_t}{\varrho_p} = \frac{pr}{2\delta_k}$$

Tak więc w walczaku naprężenia obwodowe są dwa razy większe od południkowych, a w czaszy kulistej są one sobie równe.

2. Jaki ma być stosunek grubości  $\delta_k/\delta$  czaszy i walczaka z zadania 1, aby: a) współczynnik bezpieczeństwa był ten sam; b) w miejscach  $C$  i  $D$  odkształcenia stanu błonowego były jednakowe?

Odp. a. Biorąc wartości  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  jak wyżej, mamy z wzoru (b)

$$(\sigma_{red})_{walczak} = (pr/2\delta)\sqrt{3}, \quad (\sigma_{red})_{kula} = pr/2\delta_k$$

i z równości  $\sigma_{red}$  wynika  $\delta_k/\delta = 1/\sqrt{3} \approx 0,58$ .

b. Aby w miejscu  $C$  po odkształceniu nie było różnicy promienia  $r$  walczaka i kulistej czaszy, odkształcenia obwodowe  $\epsilon_t$  muszą być równe

$$(\epsilon_t)_{walczak} = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu\sigma_r)_{walczak} = (\epsilon_t)_{kula} = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu\sigma_r)_{kula}$$

i po wstawieniu wyników z zadania 1 mamy dla  $\nu = 0,3$

$$\delta_k/\delta = (1-\nu)/(2-\nu) \approx 0,41$$

W praktyce istotniejszy jest warunek (a) i tak zazwyczaj kształtujemy połączenie kulistej czaszy i walczaka.

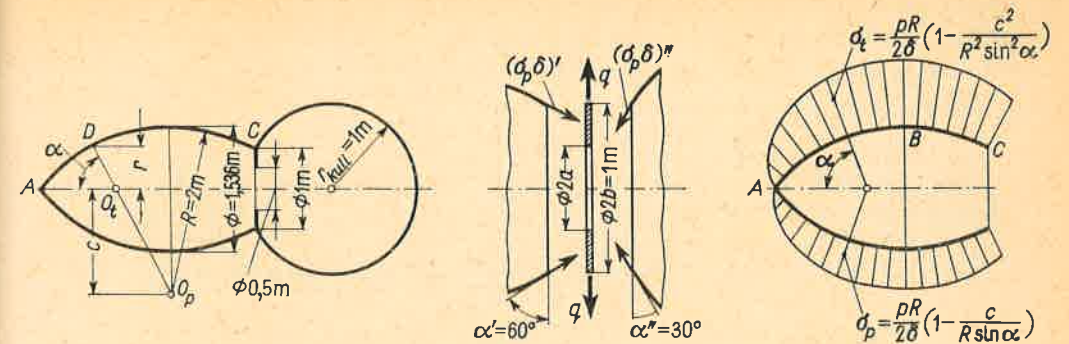
3. Poddany ciśnieniu  $p = 2 \text{ MPa}$  zbiornik złożony z owaloidu  $ABC$  i czaszy kulistej wzmocniony jest w załomie  $C$  pierścieniową przeponą (rys. 12.28). Jaka ma być jej grubość  $\delta$ , jeśli wymagany współczynnik bezpieczeństwa  $n_e = 1,5$ , zaś  $R_e = 300 \text{ MPa}$ ?

Rozwiązanie. Wzoruując się na rys. 12.26 wyznaczamy z wzoru (c) poosiową składową  $n' = n''$  oddziaływać  $(\sigma_p \delta)'$  i  $(\sigma_p \delta)''$

$$n' = n'' = pb/2 = 2 \cdot 10^6 \cdot 0,5/2 = 0,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

a następnie z wzoru (d) przy  $\alpha' = 60^\circ$  i  $\alpha'' = 30^\circ$

$$q = n'(\text{ctg } 60^\circ + \text{ctg } 30^\circ) = 0,5 \cdot 10^6 [(1/\sqrt{3}) + \sqrt{3}] = 1,155 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$



Rys. 12.28. Analiza pracy załomu i zbiornika owaloidalnego

jako promieniowe obciążenie pierścieniowej tarczy (przepony). Wykorzystując z kolei wyniki z rys. 11.6, przy  $S_b = q/\delta$ , mamy z wzoru (e) art. 11.2 po przekształceniach

$$\delta = \frac{2qb^2}{(b^2 - a^2) \sigma_{red}} = \frac{2qb^2 n_e}{(b^2 - a^2) R_e} = \frac{2 \cdot 1,155 \cdot 10^6 \cdot 0,5^2 \cdot 1,5}{(0,5^2 - 0,25^2) 300 \cdot 10^6} = 1,53 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 15,3 \text{ mm}$$

4. Z badać rozkład naprężeń  $\sigma_p$  i  $\sigma_t$  w owaloidalnej części zbiornika z zadania 3. Grubość ścianki  $\delta = 1 \text{ cm}$ .

Odp. Wyrażając wszystkie wielkości w funkcji kąta  $\alpha$ :

$$r = R \sin \alpha - c, \quad \varrho_t = \overline{DO}_t = (R \sin \alpha - c)/\sin \alpha, \quad \varrho_p = R = \text{const}$$

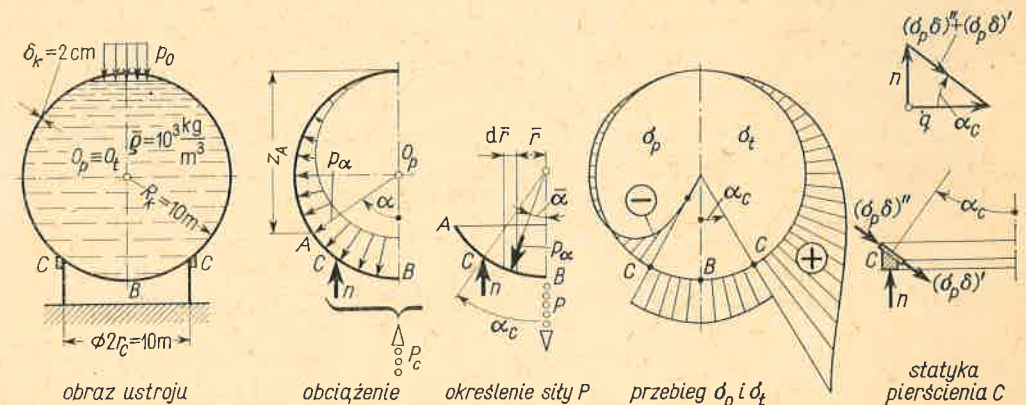
mamy z wzorów (12.12) i wzoru (a)

$$\sigma_p = \frac{pR}{2\delta} \left(1 - \frac{c}{R \sin \alpha}\right), \quad \sigma_t = \frac{pR}{2\delta} \left(1 - \frac{c^2}{R^2 \sin^2 \alpha}\right)$$

Przebieg tych naprężeń wzdłuż łuku  $ABC$  podaje rysunek. Niebezpieczny jest punkt  $B$ , w którym  $\alpha = 90^\circ$ , a wartości

$$(\sigma_p)_B \approx 77 \text{ MPa}, \quad (\sigma_t)_B \approx 124 \text{ MPa}, \quad \sigma_{red} \approx 105 \text{ MPa}$$

5. Kulisty nieważki zbiornik oparty na cylindrycznym płaszczu  $CC$  (rys. 12.29) wypełniono cieczą o gęstości  $\bar{\rho}$ , przy czym naciśnienie  $p_0 = 0$ . Wyznaczyć przebieg naprężeń  $\sigma_p$  i  $\sigma_t$  w zbiorniku oraz określić siłę obwodową w pierścieniu  $C$ .



Rys. 12.29. Analiza napieć w zbiorniku kulistym



Rozwiązanie. Obciążenie zbiornika stanowią: reakcja płaszcza  $CC$  równa ciężarowi cieczy  $P_c = 4\pi R^3 \bar{\rho}g/3$ , o natężeniu

$$n = P_c/2\pi r_c$$

oraz ciśnienie równe ciężarowi słupa cieczy o wysokości  $z_A$

$$p_x = \bar{\rho}gz_A = \bar{\rho}gR(1 + \cos \alpha).$$

Dla dolnej części płaszcza wypadkowa siła  $P$  obliczona podobnie jak przy formułowaniu wzoru (a) i podstawieniu  $\bar{r} = R \sin \alpha$  jest

$$P = \int_0^\alpha p_\alpha d\bar{r} 2\pi\bar{r} - P_c = \int_0^\alpha \bar{\rho}gR(1 + \cos \alpha) 2\pi R \sin \alpha \cos \alpha d\alpha - P_c =$$

$$= (\pi/3) \bar{\rho}gR^3 [5 - \cos^2 \alpha (3 + 2 \cos \alpha)] - (4\pi/3) \bar{\rho}gR^3.$$

Gdy kąt  $\alpha < \alpha_c$ , wówczas we wzorze powyższym nie ma ostatniego składnika, czyli siły  $P_c$ . Uwzględniając to mamy z wzoru (12.12b)

$$\sigma_p = \frac{\bar{\rho}gR^2}{6\delta} \left( 5 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \right), \text{ gdy } \alpha < \alpha_c, \quad \sigma_p = \frac{\bar{\rho}gR^2}{6\delta} \left( 1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right), \text{ gdy } \alpha > \alpha_c.$$

Podstawiając te wielkości do równania (12.12a) znajdujemy

$$\sigma_t = \frac{\bar{\rho}gR^2}{6\delta} \frac{1 + 7 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}, \text{ gdy } \alpha < \alpha_c,$$

$$\sigma_t = \frac{\bar{\rho}gR^2}{6\delta} \frac{5 + \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}, \text{ gdy } \alpha > \alpha_c.$$

Podane na rysunku przebiegi  $\sigma_p$  i  $\sigma_t$  wykazują przeskoki na podparciu  $CC$ , przy czym  $\sigma_p$  zmienia nie tylko wartość, lecz i znak. Widać, że niebezpieczne jest miejsce tuż powyżej pierścienia  $CC$ . Biorąc dane liczbowe jak na rysunku i  $\alpha_c = 30^\circ$  mamy

$$\sigma_p = -83 \text{ MPa}, \quad \sigma_p = 175 \text{ MPa}, \quad \sigma_{red} = 228 \text{ MPa}.$$

Raptowny wzrost wartości  $\sigma_p$  i  $\sigma_t$  w otoczeniu pierścienia  $CC$  można zmniejszyć zwiększając  $r_c$ . Dając na przykład  $r_c \approx 7,1 \text{ m}$ , czyli  $\alpha_c = 45^\circ$ , zmniejszamy wartość  $\sigma_{red}$  około dwa razy.

Na obciążenie jednostki długości pierścienia składają się: różnica sił wynikających z przeskoku wartości  $\sigma_p$

$$(\sigma_p \delta)' - (\sigma_p \delta)'' = \frac{\bar{\rho}gR^2}{6} \left( 5 + \frac{2 \cos^2 \alpha_c}{1 + \cos \alpha_c} \right) - \frac{\bar{\rho}gR^2}{6} \left( 1 - \frac{2 \cos^2 \alpha_c}{1 - \cos \alpha_c} \right) = \frac{2\bar{\rho}gR^2}{3 \sin^2 \alpha_c}$$

oraz pionowa reakcja płaszcza  $n$ . Łatwo sprawdzić, że pierwsza z tych sił jest równa  $n/\sin \alpha_c$ , a wypadkowe obciążenie na jednostkę długości  $q = n \operatorname{ctg} \alpha_c$  jest poziome, czyli działa w płaszczyźnie pierścienia i wywołuje w pierścieniu ścisnąjącą siłę obwodową

$$N = qr_c = (P_c/2\pi) \operatorname{ctg} \alpha_c = 2\bar{\rho}gR^3 \operatorname{ctg} \alpha_c/3 = 11,32 \cdot 10^3 \text{ kN}.$$

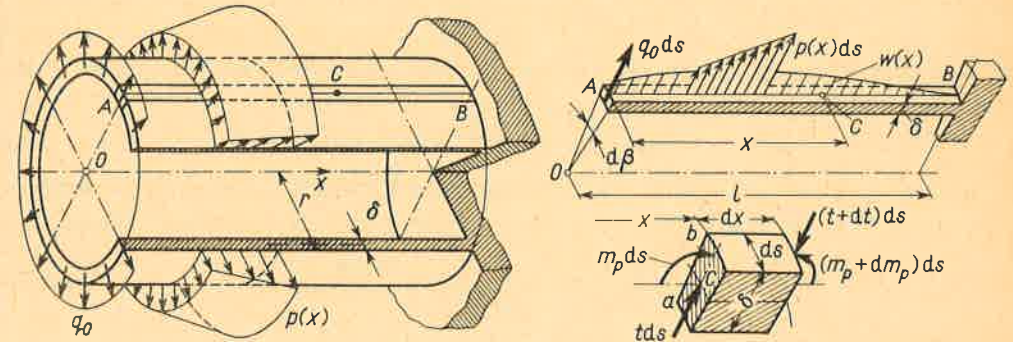
6. Jak zmieniają się wyniki poprzedniego zadania, jeśli na swobodną powierzchnię cieczy działa nadciśnienie  $p_0$ ?

Odp. Naprężenia  $\sigma_p$  i  $\sigma_t$  wzrosną o  $p_0 R/2\delta$  (zasada superpozycji).

### 12.5. Osiowosymetryczne zginanie rury kołowej

Omawiając błonową teorię powłok podano przykłady (rys. 12.25 i 12.26), gdy jej wyniki są sprzeczne z fizycznym obrazem zjawisk. Sprzeczności te znikają, jeśli uwzględnić pominiętą dotychczas sztywność powłoki na zginanie. W tym jednak ujęciu zadanie staje się

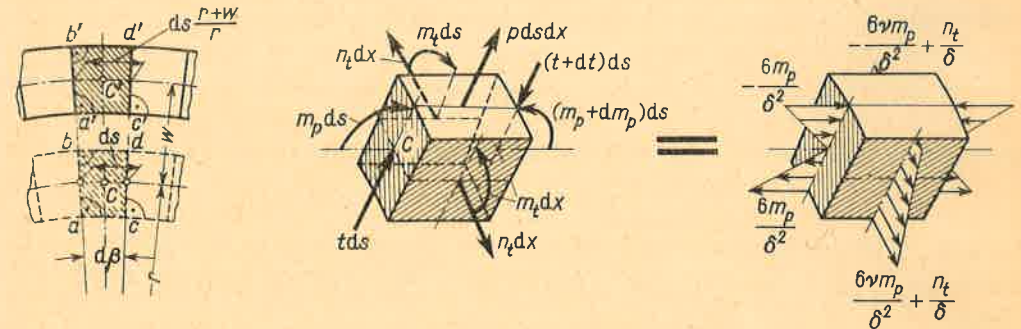
złożone i dlatego ograniczymy się do analizy cienkościennej rury kołowej przy obciążeniu osiowosymetrycznym, wywołującym osiowosymetryczny stan przemieszczeń  $w(x)$  (rys. 12.30).



Rys. 12.30. Obciążenie rury i obraz wysiłku przekroju elementarnego paska

Aby to zadanie rozwiązać w prosty sposób, wydzielimy z rury nieskończenie wąski pasek  $AB$  i potraktujmy go jak belkę mającą ugięcie  $w(x)$ . Obciążenie tej belki wywołuje w jej poprzecznym przekroju moment gnący o natężeniu  $m_p$  Nm/m i siłę tnącą o natężeniu  $t$  N/m. Na obciążenie to składają się nie tylko znane siły  $q_0 ds$ ,  $p(x) ds$ , lecz i nie pokazane na rysunku oddziaływania sąsiednich pasków. Aby je określić, rozważmy odkształcenia poprzecznego przekroju  $C$  badanego paska, gdy po obciążeniu zajmie on położenie  $C'$  (rys. 12.31). Szerokość  $ds$  paska zmienia się na  $ds (r+w)/r$ , a więc doznaje wydłużenia względnego

$$\epsilon_t = w/r, \tag{a}$$



Rys. 12.31. Obraz odkształceń paska i wysiłku oraz naprężeń w elemencie powłoki

co odpowiada istnieniu obwodowej siły, której natężenie na jednostkę długości w kierunku osi  $x$  jest

$$n_t = E\epsilon_t \delta = E\delta w/r \text{ N/m}. \tag{b}$$

Z rysunku widać też, że kąt  $d\beta$  między bokami  $ab$  i  $cd$  zostaje po odkształceniu ten sam. Sytuacja ta jest podobna jak w cylindrycznym zgięciu płyt (rys. 12.18) i oznacza istnienie

na wzdłużnych bokach paska dodatkowych naprężeń normalnych niezależnie od tych, które odpowiadają sile  $n_t$ . Te dodatkowe naprężenia są tak jak w płytach liniowo zmienne wzdłuż grubości  $\delta$  i dają wypadkowy moment o natężeniu  $m_t = \nu m_p$  (wzór c art. 12.3). To z kolei powoduje, że sztywność na zginanie elementarnej beleczki nie jest  $E\delta^3 ds/12$ , lecz

$$D ds = E\delta^3 ds/12(1-\nu^2), \quad (c)$$

jak przy cylindrycznym zgięciu płyt, a związek między momentem południkowym  $m_p$  i ugięciem  $w(x)$  ma postać

$$m_p ds = D ds (d^2 w/dx^2) \quad \text{lub} \quad m_p = D (d^2 w/dx^2). \quad (d)$$

W wyniku tych rozważań pełny obraz obciążenia i naprężeń normalnych w elemencie beleczki jest taki, jak na rys. 12.31, przy czym wartości naprężeń w warstwach skrajnych są

$$(\sigma_p)_{\text{ekstr}} = \pm \frac{6m_p}{\delta^2}, \quad (\sigma_t)_{\text{ekstr}} = \pm \frac{6\nu m_p}{\delta^2} + \frac{n_t}{\delta}. \quad (12.13)$$

Wyrażenia te poza nieistotną zmianą oznaczeń różnią się od analogicznych wyrażań art. 12.3 składnikiem  $n_t/\delta$  odpowiadającym sile  $n_t$ . Widać także, że zależą one od ugięcia  $w(x)$ . Aby to ugięcie wyznaczyć, sformułujmy dla badanego elementu paska warunki równowagi. Jeden z nich — warunek równowagi momentów w płaszczyźnie południkowej daje w wyniku

$$dm_p/dx = t, \quad (e)$$

a więc zależność identyczną z wzorem (5.2) dla belek. Warunek drugi — równowagi rzutów sił na kierunek promienia

$$t ds - (t+dt) ds + p ds dx - n_t dx (ds/r) = 0,$$

daje po przekształceniach i skróceniu przez  $ds dx$

$$dt/dx = p - (n_t/r). \quad (f)$$

Wykorzystując wyniki (e), (d) i (b) otrzymujemy dla  $D = \text{const}$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E\delta}{r^2} w = p. \quad (12.14)$$

Rozwiązanie tego równania daje szukaną funkcję  $w(x)$  w postaci sumy dwóch składników

$$w(x) = w_s(x) + w_0(x). \quad (12.15)$$

Składnik  $w_s(x)$  to rozwiązanie szczególne równania zależne od funkcji  $p(x)$ . Jeśli ta funkcja jest ciągła na danym odcinku rury, to w równaniu (12.14) można pominąć człon  $D (d^4 w/dx^4)$  i wtedy

$$w_s(x) \approx \frac{p(x) r^2}{E\delta}, \quad (12.16)$$

co odpowiada sytuacji, gdy płaszcz jest idealnie giętki, a rura pracuje w stanie błonowym.

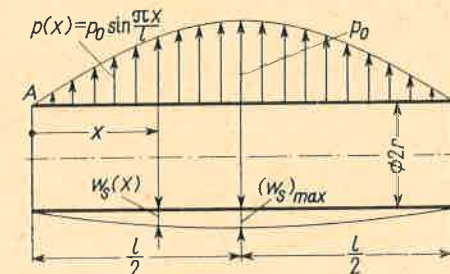
Weźmy przykładowo (rys. 12.32), że  $p(x) = p_0 \sin(\pi x/l)$ . Ścisłe rozwiązanie szczególne równania (12.14)

$$w_s(x) = \frac{p_0 r^2}{E\delta} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{1}{1 + (\pi^4 D r^2 / E \delta l^4)}$$

różni się od wartości z wzoru (12.16) składnikiem

$$\frac{\pi^4 D r^2}{E \delta l^4} = \frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{r\delta}{l^2} \right)^2,$$

którego wartość w porównaniu z jednością jest dla cienkościennych rur bardzo mała. Dla przykładu, gdy  $l = 5r$ ,  $r = 10\delta$ ,  $\nu = 0,3$ , składnik ten ma wartość  $1,4 \cdot 10^{-4}$ , a więc jest bez znaczenia.



Rys. 12.32. Przykład rozwiązania szczególnego

Drugim składnikiem jest rozwiązanie ogólne  $w_0(x)$  uproszczonego równania (12.14), któremu nadajemy postać

$$w_0^{IV} + 4k^4 w_0 = 0, \quad (12.17a)$$

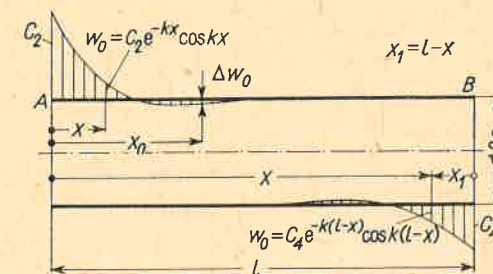
gdzie

$$k^4 = \frac{E\delta}{4Dr^2} = \frac{3(1-\nu^2)}{r^2\delta^2} \frac{1}{m^4}. \quad (12.17b)$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja  $w_0(x)$  jest

$$w_0 = C_1 e^{-kx} \sin kx + C_2 e^{-kx} \cos kx + C_3 e^{-k(l-x)} \sin k(l-x) + C_4 e^{-k(l-x)} \cos k(l-x), \quad (12.18)$$

przy czym  $C_1, \dots, C_4$  są stałymi całkowania, a  $l$  — dowolnie obrana długość, na przykład cała długość rury. W tej postaci funkcja  $w_0(x)$  ma charakter drgań tłumionych wychodzących z brzegów  $x = 0$  i  $x = l$ . Dla przykładu, gdy  $C_1 = C_3 = 0$ , a  $C_2$  i  $C_4$  są tego samego



Rys. 12.33. Typowy przebieg funkcji  $w_0$  rozwiązania ogólnego

rzędu, to widać (rys. 12.33), że „zaburzenie”  $C_2$  wychodzące z brzegu  $x = 0$  nie dociera do brzegu  $x = l$  i na odwrót w odniesieniu do „zaburzenia”  $C_4$ . Łatwo przy tym ustalić długość  $x_0$ , przy której  $(w_0)_{x=x_0}$  ma wartość pomijalną, np.  $(w_0)_{x=x_0} = 0,01 (w_0)_{x=0}$ . Trak-



tując bowiem czynnik  $e^{-kx}$  jako „amplitudę” i biorąc poprzednie kryterium mamy przy  $\nu = 0,3$

$$e^{-kx} = 0,01, \quad \text{skąd} \quad x_0 = -(\ln 0,01)/k \approx 3,5\sqrt{r\delta}. \quad (g)$$

Uświadamiając sobie, że  $w_0(x)$  jest obrazem odkształceń powłoki obciążonej tylko na brzegach ( $p \equiv 0$ ), widzimy, że gdy długość rury  $l > 3,5\sqrt{r\delta}$ , wówczas z techniczną dokładnością stałe  $C_1$  i  $C_2$  możemy określać z warunków na brzegu  $x = 0$ , a stałe  $C_3$  i  $C_4$  z warunków na  $x = l$ . Tymi warunkami narzuconymi dla całej funkcji  $w(x)$  mogą być albo warunki geometryczne, albo statyczne. Dla przykładu, na utwierdzonym brzegu  $B$  (rys. 12.30) całkowite przesunięcie  $w$  oraz pochodna  $dw/dx$  są równe zero, czyli

$$(w)_{x=l} = 0, \quad (dw/dx)_{x=l} = 0, \quad (h)$$

a na brzegu  $A$ , gdzie znamy wysiłek przekroju  $m_p = 0$  i  $t = q_0$ , mamy z wzorów (d) i (e) zależności

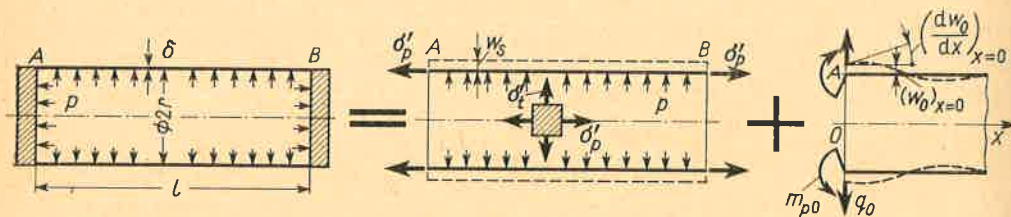
$$D(d^2w/dx^2)_{x=0} = 0, \quad D(d^3w/dx^3)_{x=0} = q_0, \quad (i)$$

w których  $w = w_s + w_0$  określamy z wyrażeń (12.16) i (12.18).

Z powyższych rozważań wynika tok rozwiązania. Etap pierwszy to określenie  $w_s$ , etap drugi to sformułowanie warunków brzegowych i określenie z nich wartości  $C_1, \dots, C_4$ . Etapem końcowym jest obliczenie z wzorów (b) i (d) wartości  $n_t$  i  $m_p$ , a z wzorów (12.13) wartości  $\sigma$  i ocena bezpieczeństwa.

**Zadania**

1. Zamknięty nieodkształcalnymi dnami długi zbiornik (rys. 12.34) poddany jest ciśnieniu  $p$ . Wyznaczyć przebieg naprężeń  $\sigma_p$  i  $\sigma_t$  w zbiorniku.



Rys. 12.34. Analiza zbiornika ze sztywnymi dnami

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od wydzielenia błonowego stanu napięć i odpowiadających mu odkształceń rury. W stanie tym, jak wiemy z zadań 1 i 2 poprzedniego artykułu,

$$\sigma'_p = pr/\delta, \quad \sigma'_t = pr/2\delta, \quad \epsilon'_t = pr(2-\nu)/2E\delta,$$

a przesunięcie  $w_s = r\epsilon'_t$  i kąt  $dw_s/dx$  są

$$w_s = \frac{pr^2(2-\nu)}{2E\delta} = \text{const}, \quad \frac{dw_s}{dx} = 0.$$

Istnienie nieodkształcalnych den  $A$  i  $B$  powoduje powstanie oddziaływań  $m_{p0}$  i  $q_0$  o nie znanych na razie wartościach. Odpowiadające im odkształcenia  $w_0$  i  $dw_0/dx$  są takie, że na brzegu  $x = 0$

$$(w)_{x=0} = (w_0)_{x=0} + [pr^2(2-\nu)/2E\delta] = 0, \quad (dw/dx)_{x=0} = (dw_0/dx)_{x=0} + 0 = 0,$$

i podobnie na brzegu  $x = l$ . Z racji dużej długości rury, można rozdzielić role stałych  $C_1$  i  $C_2$  od stałych  $C_3$  i  $C_4$ , wobec czego na brzegu  $x = 0$  mamy z zależności (12.18)

$$(w_0)_{x=0} = C_2, \quad (dw_0/dx)_{x=0} = C_1 k - C_2 k.$$

Wstawiając te wyrażenia do warunków brzegowych mamy

$$C_1 = C_2 = -pr^2(2-\nu)/2E\delta,$$

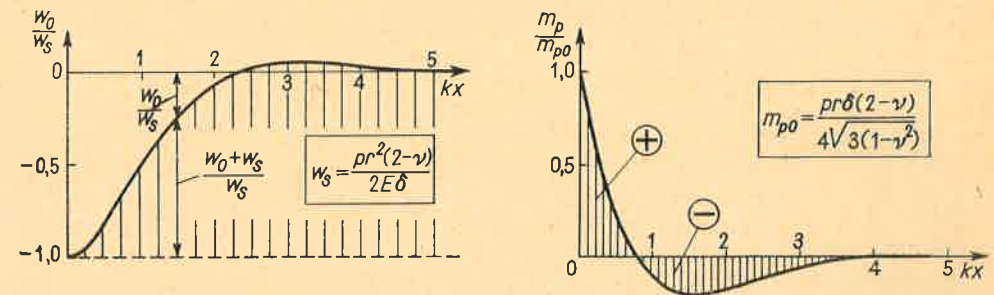
skąd określamy przesunięcie  $w_0$ :

$$w_0 = -\frac{pr^2(2-\nu)}{2E\delta} e^{-kx}(\sin kx + \cos kx),$$

a z wzorów (b) i (d) siły  $n_t$  i momenty  $m_p$ :

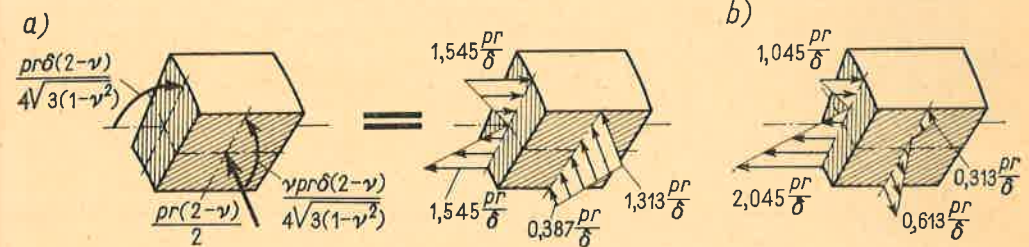
$$n_t = -\frac{pr(2-\nu)}{2} e^{-kx}(\sin kx + \cos kx), \quad m_p = \frac{pr\delta(2-\nu)}{4\sqrt{3(1-\nu^2)}} e^{-kx}(\cos kx - \sin kx).$$

Przebieg  $w_0$ , a więc i  $n_t$  oraz  $m_p$  w funkcji zmiennej  $kx$  wskazuje (rys. 12.35), że utwierdzenie brzegów



Rys. 12.35. Odkształcenie  $w_0$  i moment  $m_p$  stanu zgięciowego z rys. 12.34

rury powoduje tylko lokalne zaburzenie stanu błonowego. Odpowiadające temu zaburzeniu wartości  $\sigma_p$  i  $\sigma_t$  obliczone z wzorów (12.13) superponujemy z wartościami  $\sigma'_p$  i  $\sigma'_t$  stanu błonowego. Dla przykładu, w przekroju  $x = 0$  momenty  $m_p, m_p = n_t$  oraz  $n_t$  dają przy  $\nu = 0,3$  obraz naprężeń jak na rys. 12.36a



Rys. 12.36. Obrazy naprężeń w elemencie rury z rys. 12.34 dla  $x = 0$

i wtedy z obrazów całkowitych naprężeń (rys. 12.36b) widzimy, że niebezpiecznym miejscem jest wewnętrzna powierzchnia zbiornika, gdzie

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p \sigma_t + \sigma_t^2} \approx 1,82 pr/\delta.$$

Wartość ta jest przeszło dwa razy większa niż w stanie błonowym (patrz zadanie 2 art. 12.4).

Wartość obciążenia  $q_0$  wyznaczamy z wzoru (e)

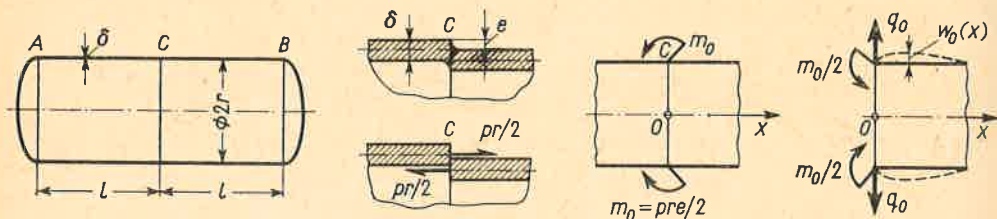
$$q_0 = (t)_{x=0} = \left( \frac{dm_p}{dx} \right)_{x=0} = - \frac{pr\delta(2-\nu)}{2\sqrt{3}(1-\nu^2)} k (e^{-kx} \cos kx)_{x=0} = - \frac{p\sqrt{r\delta}(2-\nu)}{2\sqrt[4]{3}(1-\nu^2)}$$

Widać, że  $q_0 < 0$ , co zgadza się z fizycznym obrazem.

2. Znaleźć ekstremalną wartość  $\sigma_{red}$  w rurze z zadania 1, gdy  $kx = \pi/2$  i  $\nu = 0,3$ .

Odp. Na zewnętrznej powierzchni  $\sigma_{red} \approx 0,874 pr/\delta$ .

3. Jaki wpływ na wartości ekstremalnych naprężeń ma niedokładność wykonania blach  $AC$  i  $BC$  długiego zbiornika (rys. 12.37), powodująca, że na ich styku występuje mimośród  $e$ ?



Rys. 12.37. Analiza mimośradowości połączenia blach płaszczu

Rozwiązanie. Wprowadzając, jak pokazuje rysunek, dwie przeciwne siły o natężeniu  $pr/2$ , zapewniamy w każdej części  $AC$  i  $CB$  błonowy stan napięcia, na który mimośród  $e$  nie ma żadnego wpływu. Aby wrócić do rzeczywistości, gdy takich sił nie ma, musimy zbiornik obciążyć odwrotnym układem sił, dającym na całym obwodzie przekroju  $C$  obciążenie momentami o natężeniu  $m_0 = pre/2$ . Z racji symetrii ustroju moment ten dzieli się po połowie na lewą i prawą część, przy czym odkształcenie  $(w_0)_{x=0} = 0$ . Wynika stąd, że w przekroju bardzo bliskim  $C$  jest  $m_p = m_0/2 = pre/4$ , a  $n_t = 0$ . Obliczone z (12.13) wartości

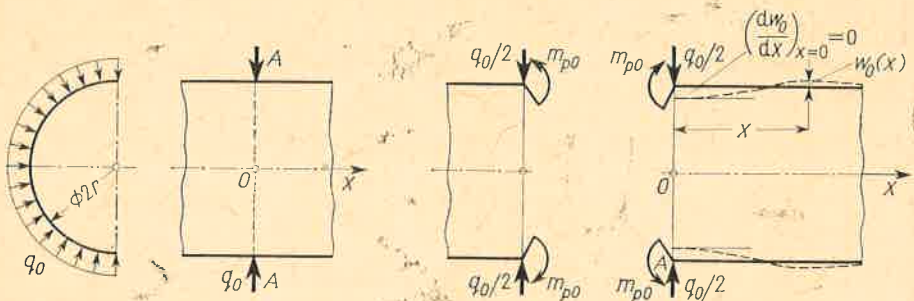
$$\sigma_p = \mp 3pre/2\delta^2, \quad \sigma_t = \mp 3vpre/2\delta^2$$

nakładają się na naprężenia stanu błonowego i w wyniku

$$(\sigma_p)_{całkowite} = (pr/2\delta) [1 + (3e/\delta)], \quad (\sigma_t)_{całkowite} = (pr/\delta) [1 + (3ve/2\delta)].$$

Dla przykładu, gdy  $e = \delta/3$  i  $\nu = 0,3$ , wówczas  $(\sigma_p)_{całkowite} = pr/\delta$ ,  $(\sigma_t)_{całkowite} = 1,15pr/\delta$ , a  $\sigma_{red} = 0,942pr/\delta$ , a więc wzrasta o około 9% w porównaniu z wartością  $\sigma_{red}$  odpowiadającą idealnemu wykonaniu.

4. Na bardzo długą rurę działa w przekroju  $A$  promieniowe obciążenie  $q_0$  N/m (rys. 12.38). Wyznaczyć przebieg  $w(x)$ ,  $m_p(x)$  i  $t(x)$ .



Rys. 12.38. Pierścieniowe obciążenie rury bardzo długiej

Rozwiązanie. Rozetniemy myślowo rurę w przekroju  $A$ , dzieląc przy tym na połowy obciążenie  $q_0$  i uwidaczniając nie znany na razie moment  $m_{p0}$ . Z racji symetrii kąt  $dw_0/dx$  w przekroju  $A$  jest równy zero, a według umowy z rys. 12.31 siła tnąca  $(t)_{x=0} = -q_0/2$ . Tak więc dla prawej części

$$(dw_0/dx)_{x=0} = 0, \quad D(d^3w_0/dx^3)_{x=0} = -q_0/2,$$

skąd przy wykorzystaniu wzorów (12.18) i uwzględnieniu, że  $C_3 = C_4 = 0$ , mamy dwa równania

$$C_1 k - C_2 k = 0, \quad 2k^3 D(C_1 + C_2) = -q_0/2.$$

Ich rozwiązanie daje  $C_1 = C_2 = -q_0/8k^3 D$ , wobec czego

$$w(x) = w_0(x) = - \frac{q_0}{8k^3 D} e^{-kx} (\sin kx + \cos kx),$$

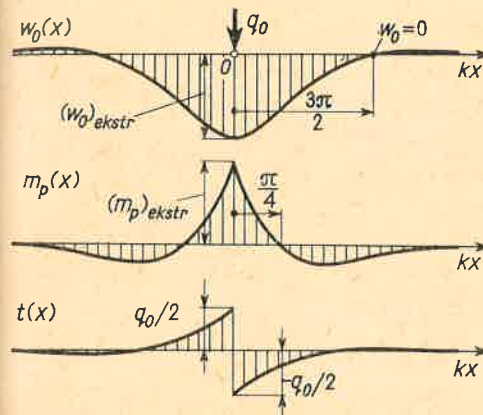
a z wzorów (d) i (e)

$$m_p = D \frac{d^2 w}{dx^2} = + \frac{q_0}{4k} e^{-kx} (\cos kx - \sin kx), \quad t = \frac{dm_p}{dx} = - \frac{q_0}{2} e^{-kx} \cos kx.$$

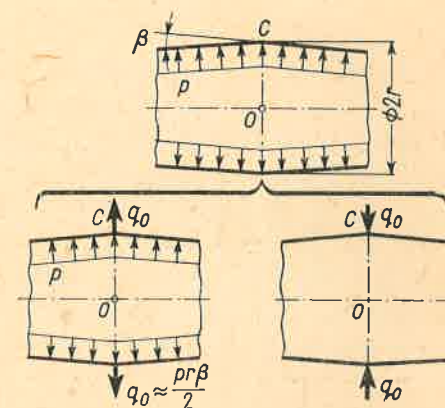
Przebiegi tych wielkości wskazują (rys. 12.39), że ekstremalne wartości  $w$ ,  $m_p$  i  $t$  występują dla  $x = 0$

$$w_{ekstr} = - \frac{q_0}{8k^3 D}, \quad (m_p)_{ekstr} = \frac{q_0}{4k}, \quad (t)_{ekstr} = - \frac{q_0}{2}$$

i są podobne do omówionych w zadaniu 1.



Rys. 12.39. Wynik rozwiązania zadania 4



Rys. 12.40. Przybliżona ocena wpływu załomu

5. Wykorzystując tok rozumowania jak w zadaniu 3 i wyniki zadania 4 określić wpływ na wartość naprężeń niewielkiego załomu o kąt  $\beta$  płaszczu zbiornika ciśnieniowego (rys. 12.40).

Odp. Po wprowadzeniu w przekroju  $C$  załomu dwóch przeciwnych obciążeń  $q_0 \approx pr\beta/2$  wydzielamy część odpowiadającą jak na rys. 12.26, błonowemu stanowi napięcia, w którym

$$\sigma'_t = pr/\delta, \quad \sigma'_{p3} = pr/2\delta.$$

Pozostałe obciążenie, przy pominięciu lekkiej stożkowatości części płaszczu, jest takie jak w zadaniu 4 dla którego

$$(m_p)_{ekstr} = q_0/4k \approx pr\beta/8k, \quad (m_t)_{ekstr} = \nu (m_p)_{ekstr} = \nu pr\beta/8k,$$

a ekstremalne naprężenia przy podstawieniu  $k$  z (12.17b) i  $\nu = 0,3$

$$\sigma''_p = \pm 6 (m_p)_{ekstr} / \delta^2 \approx \pm (0,58\beta) (pr/\delta) \sqrt{r/\delta}, \quad \sigma''_t = 0,3 \sigma_p$$

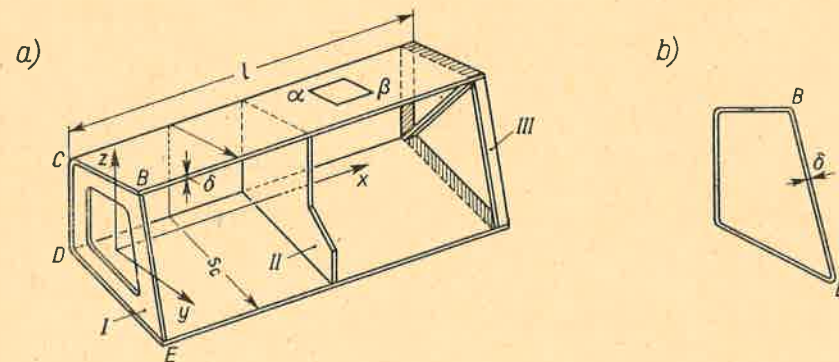
mogą być znaczne z uwagi na czynnik  $\sqrt{r/\delta}$  (patrz wzór f art. 12.4). Całkowite naprężenia są sumą obydwóch rozwiązań (') i (').



# 13 PRĘTY CIENKOŚCIENNE

## 13.1. Schemat statyczny. Zginanie pręta o przekroju otwartym

Poza omówionymi w rozdz. 11 i 12 przykładami ustrojów cienkościennych, jak tarcze, płyty i powłoki, do tejże klasy konstrukcji należą stosowane powszechnie pręty cienkościenne. Taki typowy pręt (rys. 13.1) składa się z pryzmatycznego płaszcza o tworzących



Rys. 13.1. Obraz budowy pręta cienkościennego

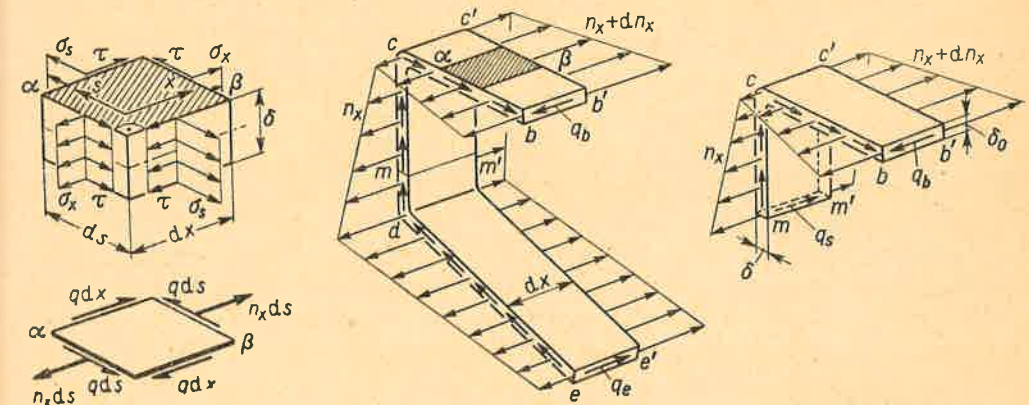
a) typowy pręt o przekroju otwartym z żebrami ramowym I, tarczowym II i kratowym III, w którym zakreślona część ma podwójną rolę: żebra i płaszcza; b) pręt rurowy.

równoległych do osi pręta i żeber poprzecznych do tej osi. Grubość  $\delta$  płaszcza jest przy tym wielokrotnie mniejsza od długości  $s_c$  konturu jego przekroju poprzecznego. Z kolei długość  $s_c$  jest znacznie mniejsza od długości  $l$  pręta. Żebra pręta mają postać cienkościennych płaskich przepon bądź ram lub kratownic. Żebra te cechuje bardzo duża sztywność w ich płaszczyznach, a jednocześnie duża wiotkość w kierunku do tych płaszczyzn prostopadłym. Jeśli kontur przekroju nie jest zamknięty (rys. 13.1a), to mówimy, że pręt jest o przekroju otwartym, jeśli zaś tworzy on linię zamkniętą, to pręt nazywamy rurą (rys. 13.1b).

Gdy na pręt działa obciążenie, wówczas w jego płaszczu powstają naprężenia, które uwidaczniamy wycinając myślowo element  $\alpha\beta$  (rys. 13.2a). Z racji cienkościenności płaszcza przyjmujemy, że są one równoległe do środkowej powierzchni płaszcza i równomierne wzdłuż jego grubości  $\delta$ . Obraz ten różni się od obrazu naprężeń w powłoce (rys. 12.22) lub tarczy

(rys. 11.2) tym, że w pręcie mogą istnieć naprężenia styczne  $\tau$ , których nie było w tamtych przypadkach. Z dokładniejszej ponadto analizy okazuje się, że naprężenia  $\sigma_s$  w kierunku poprzecznym do tworzących są pomijalne w porównaniu z pozostałymi, czyli  $\sigma_x$  i  $\tau$ . Utało się wyrażać te naprężenia przez tzw. wydatki normalne  $n_x$  i styczne  $q$  zdefiniowane jako

$$n_x = \sigma_x \delta, \quad q = \tau \delta. \quad (13.1)$$



Rys. 13.2. Stan napięcia w elemencie płaszcza

Wydatki te wyrażają natężenie siły normalnej lub stycznej odniesione do jednostki długości mierzonej w odpowiednim kierunku na powierzchni środkowej płaszcza. Z symetrii naprężeń stycznych wynika przy tym, że wydatki styczne na prostokątach do siebie ścianach są równe. Jest także oczywiste, że znając wydatki  $n_x$  i  $q$  możemy z (13.1) wyznaczyć  $\sigma_x$  i  $\tau$ .

Udowodnimy teraz, że wydatki  $n_x$  i  $q$  są od siebie zależne. W tym celu przyjmijmy, że  $n_x$  jako funkcja  $x$  i  $s$  jest znane, i że ich obraz na bokach  $bcd$  i  $b'c'd'e'$  plasterka płaszcza  $dx$  jest taki, jak podaje rysunek. Przyjmijmy ponadto, że wydatek  $q = q_b$  na krawędzi  $bb'$  jest znany. Aby określić wydatek  $q_s$  w obranym punkcie  $m$  konturu, przetnijmy dodatkowo plasterkę wzdłuż  $mm'$ , przez co uwidoczniony zostaje na tej krawędzi szukany wydatek  $q_s$ . Formułując dla części  $bcm$  warunek równowagi rzutów sił na oś  $x$  mamy równanie

$$q_s dx - q_b dx + \int dn_x ds = 0 \quad (a)$$

z całką wzdłuż konturu  $bcm$  różnic elementarnych sił  $(n_x + dn_x) ds$  i  $n_x ds$  na przekrojach  $b'c'm'$  i  $bcm$ . Przekształcając równanie (a)

$$q_s = q_b - \int_s \frac{dn_x}{dx} ds \quad (13.2)$$

otrzymujemy szukaną zależność  $q$  od  $n_x(x, s)$  oraz wydatku  $q_b$  na brzegu  $b$ , czyli dla  $s = 0$ . Warto zauważyć, że sposób jej sformułowania stanowi wierną kopię postępowania podanego w art. 5.6 polegającego na wprowadzeniu dodatkowego przecięcia w wyizolowanym plasterku (rys. 5.39).

Zbadajmy z kolei przypadek, gdy pręt o przekroju otwartym ulega zgięciu poprzecznemu

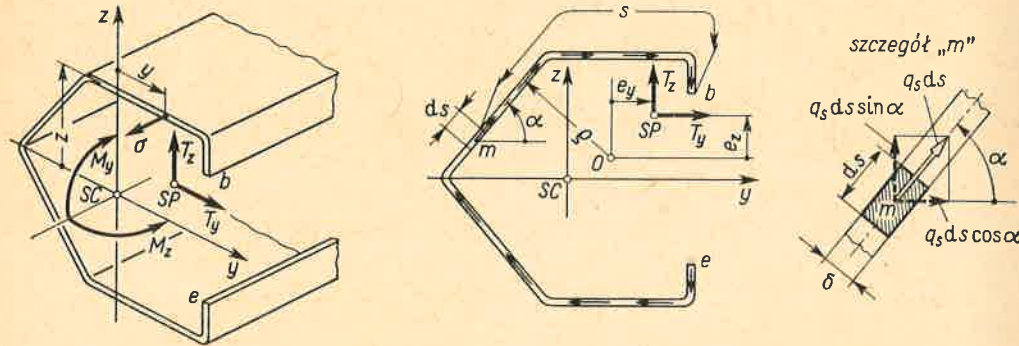


(rys. 13.3). Według wzoru (6.1a) naprężenia normalne  $\sigma$  określone w układzie głównych osi  $y$  i  $z$  są

$$\sigma_x = -\frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z},$$

wobec czego wydatek normalny  $n_x$

$$n_x = \sigma_x \delta = -\frac{M_y z \delta}{J_y} - \frac{M_z y \delta}{J_z}. \quad (13.3)$$



Rys. 13.3. Naprężenia przy poprzecznym zgięciu otwartego pręta cienkościennego

Wstawiając to do (13.2) i uwzględniając, że na swobodnej krawędzi  $b$  jest  $q_b = 0$ , otrzymujemy

$$q_s = -\int_0^s \left(-\frac{dM_y}{dx} z \delta\right) ds - \int_0^s \left(-\frac{dM_z}{dx} y \delta\right) ds = \frac{T_z S_y^{(s)}}{J_y} + \frac{T_y S_z^{(s)}}{J_z}, \quad (13.4a)$$

gdyż z wzoru (5.2) mamy  $dM_y/dx = T_z$ ,  $dM_z/dx = T_y$ , a całki

$$S_y^{(s)} = \int_0^s z \delta ds, \quad S_z^{(s)} = \int_0^s y \delta ds \quad (13.4b)$$

przedstawiają momenty statyczne względem osi  $y, z$  pola przekroju między krawędzią swobodną  $b$  a badanym punktem  $m$ .

Dzieląc  $q_s$  przez grubość  $\delta$  w badanym punkcie, doprowadzamy do formalnej zgodności z wzorem (5.18) dla naprężeń  $\tau$  w belkach o zwartym przekroju, z tym że rolę  $b_z$  spełnia tym razem grubość  $\delta$ . Różnica tkwi w tym, że w pręcie cienkościennym kierunek  $\tau$ , a więc i  $q_s$ , jest styczny do konturu, bo taki jest mechanizm pracy płaszczka. Na skutek tego obraz wydatków  $q_s$  jest jak na rysunku. Zauważmy przy tym, że  $q_s$  na drugiej swobodnej krawędzi  $e$ , gdy  $s = s_c$ , jest równe zero, gdyż momenty statyczne pola całego przekroju względem centralnych osi są

$$S_y^{(s_c)} = 0, \quad S_z^{(s_c)} = 0. \quad (b)$$

Przy badanym tu zgięciu poprzecznym wydatkom  $q_s$  odpowiadają wypadkowe siły tnące  $T_z$  i  $T_y$  jako składowe wysiłku przekroju. Z faktu tego wynika, że;

a) suma pionowych składowych, czyli  $q_s ds \sin \alpha$ , elementarnych sił  $q_s ds$  jest równa  $T_z$ ,

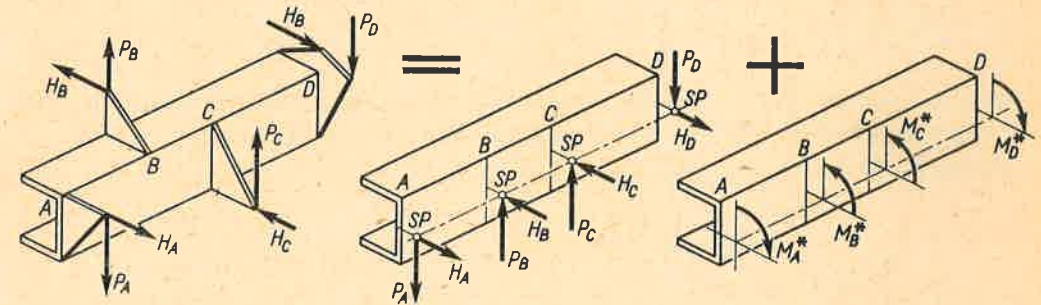
b) suma poziomych składowych, czyli  $q_s ds \cos \alpha$ , elementarnych sił  $q_s ds$  jest równa  $T_y$ ,  
 c) suma elementarnych momentów  $q_s ds \varrho$  względem dowolnie obranego punktu  $O$  jest równa momentowi  $T_y e_z - T_z e_y$ , wypadkowych sił  $T_y$  i  $T_z$  względem tegoż punktu, czyli

$$\int_0^{s_c} q_s ds \varrho = \frac{T_y}{J_z} \int_0^{s_c} S_z^{(s)} \varrho ds + \frac{T_z}{J_y} \int_0^{s_c} S_y^{(s)} \varrho ds = T_y e_z - T_z e_y. \quad (c)$$

Można udowodnić, że przy  $q_s$  danym z wzoru (13.4) warunki (a) i (b) są spełnione tożsamościowo. Aby natomiast spełnić warunek (c) przy dowolnej kombinacji wartości  $T_y$  i  $T_z$ ; np.  $T_y \neq 0, T_z = 0$  itp., wielkości  $e_y$  i  $e_z$  muszą być

$$e_y = -\frac{1}{J_y} \int_0^{s_c} S_y^{(s)} \varrho ds, \quad e_z = \frac{1}{J_z} \int_0^{s_c} S_z^{(s)} \varrho ds. \quad (13.5)$$

Tak więc przy poprzecznym zgięciu pręta o przekroju otwartym siła poprzeczna o składowych  $T_y$  i  $T_z$  musi przechodzić przez pewien szczególny punkt  $SP$  przekroju, tak zwany *środek sił poprzecznych*, którego współrzędne względem punktu  $O$  są  $e_y$  i  $e_z$  i są niezależne od wartości  $T_y$  i  $T_z$ . Jak zobaczymy, punkt ten nie pokrywa się na ogół ze środkiem ciężkości  $SC$ . Jego znajomość jest istotna dla analizy, gdyż umożliwia rozbitcie ogólnego obciążenia pręta na dwa (rys. 13.4). Pierwsze z nich, w którym siły poprzeczne przyłożone



Rys. 13.4. Rozkład obciążenia na zginające i skręcające

są w środkach sił poprzecznych odpowiednich przekrojów, stanowi omówione zgięcie poprzeczne. Drugie zadanie składowe przedstawia skręcanie cienkościennego pręta omówione osobno w art. 13.3.

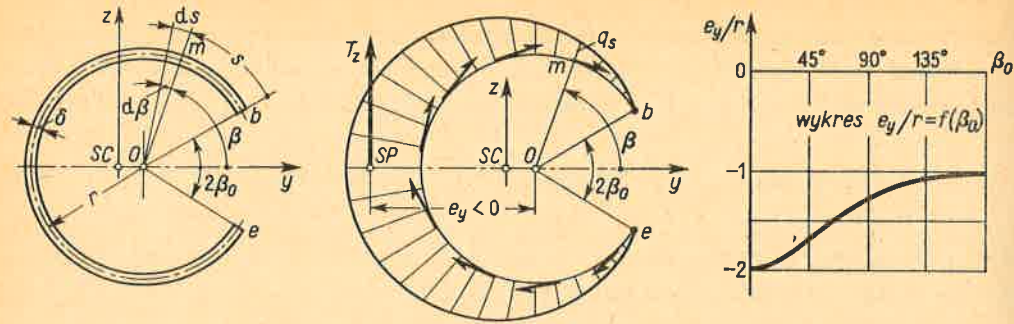
Zastosowanie podanych zależności prześledzimy na przykładzie pręta, na który w badanym przekroju działa siła  $T_z$  (rys. 13.5) i którego moment bezwładności

$$J_y = \int_{\beta_0}^{2\pi-\beta_0} (\delta r d\beta) (r \sin \beta)^2 = \left[ (\pi - \beta_0) + \frac{\sin 2\beta_0}{2} \right] r^3 \delta.$$

Ponieważ mamy tu  $T_y = 0$ , a moment statyczny dla części  $bm$

$$S_y^{(s)} = \int_{\beta_0}^{\beta} (\delta r d\beta) (r \sin \beta) = r^2 \delta (\cos \beta_0 - \cos \beta),$$



Rys. 13.5. Przykład określenia  $q_s$  i położenia środka  $SP$ 

zatem wydatek  $q_s$  w badanym punkcie  $m$  jest według (13.4)

$$q_s = \frac{T_z S_y^{(s)}}{J_y} = \frac{T_z r^2 \delta}{J_y} (\cos \beta_0 - \cos \beta).$$

Przebieg  $q_s$  w funkcji kąta  $\beta$  podaje rysunek. Ponieważ  $q_s > 0$ , zatem zgodnie z poprzednimi rozważaniami zwrot  $q_s$  jest przeciwny do obranego od  $b$  do  $m$  obiegu po konturze. Wypadkowa tego wydatku jest

$$\int_{\beta_0}^{2\pi-\beta_0} -q_s r d\beta \cos \beta = \frac{T_z r^3 \delta}{J_y} \int_{\beta_0}^{2\pi-\beta_0} (\cos \beta - \cos \beta_0) \cos \beta d\beta = \frac{T_z r^3 \delta}{J_y} \left( \pi - \beta_0 + \frac{\sin 2\beta_0}{2} \right)$$

i widać, że jest ona równa  $T_z$ , jak być musi. Położenie tej wypadkowej, czyli środek  $SP$ , określimy najprościej, obierając punkt  $O$  w środku koła, gdyż wtedy  $\varrho = r = \text{const}$ . Z wzoru (13.5) mamy

$$e_y = -\frac{1}{J_y} \int_{\beta_0}^{2\pi-\beta_0} r^2 \delta (\cos \beta_0 - \cos \beta) r \cdot r d\beta = -4r \frac{(\pi - \beta_0) \cos \beta_0 + \sin \beta_0}{2(\pi - \beta_0) + \sin 2\beta_0}.$$

Ponieważ  $e_y < 0$ , odległość tę więc odmierzymy od punktu  $O$  przeciwnie do zwrotu osi  $y$ , a więc na lewo. Widać, że środek sił poprzecznych leży na zewnątrz konturu, co jest regułą w prętach tego typu.

Druga współrzędna środka  $SP$ , czyli  $e_z$ , jest tu równa zeru. Dla przekroju bowiem symetrycznego momenty statyczne  $S_z^{(s)}$  w symetrycznie położonych punktach mają wartości przeciwne i gdy punkt  $O$  leży na osi symetrii, to suma przeciwnych składników  $S_z^{(s)} \varrho ds$  i  $-S_z^{(s)} \varrho ds$  jest równa zeru.

### Zadania

1. Co zmienia się w przykładzie (rys. 13.5), gdy zmienić: a) obieg po konturze, czyli iść od  $e$  do  $b$ ; b) zwrot osi  $y$ ?

Odp. a. Wartość  $S_y^{(s)}$  w badanym punkcie  $m$  zmienia znak i  $q_s < 0$ , co oznacza, że  $q_s$  ma zwrot zgodny z założonym obiegiem; tak więc obraz  $q_s$  zostaje ten sam.

b. Zmienia się znak we wzorze (13.5), bo dla  $e_y > 0$  jest teraz moment  $T_z e_y > 0$ , a położenie  $SP$  na obrazie przekroju nie zmienia się.

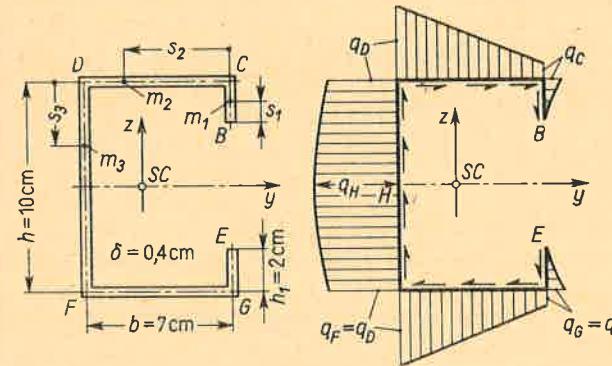
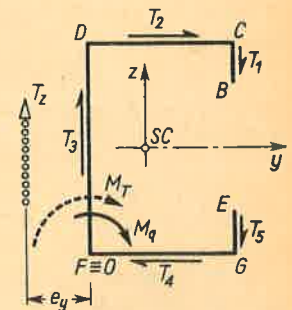
2. Określić rozkład  $q_s$  w profilu (rys. 13.6), gdy  $T_z = 10$  kN.

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od obliczenia momentu  $J_y$ ,

$$J_y \approx \frac{\delta}{12} [2h^3 - (h-2h_1)^3] + \frac{bh^2 \delta}{2} = 199,3 \text{ cm}^4,$$

a potem obliczamy momenty  $S_y^{(s)}$ . I tak dla punktu  $m_1$

$$S_y^{(s)} = s_1 \delta (h + s_1 - 2h_1)/2,$$

Rys. 13.6. Przykład obliczenia  $q_s$ 

Rys. 13.7.

podstawiając do (13.4) mamy  $q_s$  jako kwadratową funkcję  $s_1$ . Dla punktu  $C$ , gdy  $s_1 = h_1$ , otrzymujemy

$$q_C = T_z (h - h_1) h_1 \delta / 2J_y = 10^4 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 \cdot 10^{-2} / 2 \cdot 199,3 \cdot 10^{-8} = 16 \text{ kN/m}.$$

Podobnie określamy  $q_s$  w innych punktach odcinka  $BC$  i w wyniku mamy wykres  $q_s$  jak na rysunku. Z kolei dla punktu  $m_2$  moment  $S_y^{(s)}$  jest sumą momentów dla odcinka  $BC$  i  $Cm_2$ :

$$S_y^{(s)} = 0,5 (h - h_1) h_1 \delta + (s_2 \delta h / 2),$$

wobec czego  $q_s$  jest liniową funkcją  $s_2$  i zmienia się od obliczonej poprzednio wartości  $q_C$  do wartości  $q_D$  dla  $s_2 = b$ , czyli

$$q_D = T_z [(h - h_1) h_1 \delta + b h \delta] / 2J_y = 86,4 \text{ kN/m}.$$

Dla punktu  $m_3$  wreszcie mamy  $S_y^{(s)}$  jako sumę trzech składników

$$S_y^{(s)} = [(h - h_1) h_1 \delta / 2] + (b h \delta / 2) + [s_3 \delta (h - s_3) / 2],$$

z których dwa pierwsze to momenty statyczne odcinków  $BC$  i  $CD$ , a trzeci odpowiada odcinkowi  $Dm_3$ . W wyniku  $q_s$  jest kwadratową funkcją  $s_3$ , której maksimum dla  $s_3 = h/2$  jest  $q_H = 111,2$  kN/m.

Identycznie można określić  $q_s$  na odcinkach  $FG$  i  $GE$ . Ponieważ profil jest symetryczny, wydatki te są więc równe określonym poprzednio w symetrycznie położonych punktach. W rezultacie obraz  $q_s$  jest taki, jak podaje rysunek.

3. Jaki błąd popełnimy oceniając wartość  $\tau$  w profilu (rys. 13.6) według wzoru (5.17), jak dla profili zwartych?

Odp. Według wzoru (5.17)  $\tau_{sr} = T_z / A = 10 \text{ kN} / 11,2 \text{ cm}^2 = 9,0 \text{ MPa}$ , tymczasem rzeczywiste  $\tau_{\max} = q_H / \delta = 27,8 \text{ MPa}$ . Taki więc sposób oceny rzędu  $\tau$  nie jest w profilach cienkościennych właściwy.

4. Uwzględniając obraz  $q_s$  (rys. 13.6) i fakt, że wypadkowa  $q_s$  jest równa  $T_z$ , oceniono rząd maksymalnej wartości  $q_s$  jako  $q_s = T_z / h$ . Jaki błąd daje taka ocena?

Odp. Tylko  $\sim 10\%$ . Sposób ten można stosować i w innych profilach podobnego typu. Dla przykła-



du w profilu (rys. 13.5), gdy  $\beta_0 = \pi/4$ , ścisła wartość  $q_{\max} \approx 0,6 T_z/r$ , a przybliżona  $q = T_z/2r$  i błąd oceny jest  $\sim 20\%$ .

5. Wykorzystując obraz  $q_s$  (rys. 13.6) i wyniki zadania 2 określić położenie środka  $SP$  bez stosowania wzoru (13.5).

Rozwiązanie. Obliczmy wypadkowe  $T_1$ ,  $T_2$  i  $T_5$  z wydatków  $q_s$  na bokach  $BC$ ,  $CD$ ,  $GE$  (rys. 13.7). Ich wartości są

$$T_1 = T_5 = \int_0^{h_1} q_s ds_1 = \frac{T_z}{J_y} \int_0^{h_1} \frac{s_1 \delta (h - 2h_1 + s_1)}{2} ds_1 = \frac{T_z (3h - 4h_1) h_1^2 \delta}{12J_y} \approx 0,147 \text{ kN},$$

$$T_2 = \frac{(q_c + q_d) b}{2} = \frac{16,0 + 86,4}{2} \cdot 7 \cdot 10^{-2} = 3,59 \text{ kN}.$$

Obierzmy teraz naroże  $F$  jako punkt odniesienia  $O$  i obliczmy względem niego moment sił  $T_1, \dots, T_5$ . Widać, że jest on

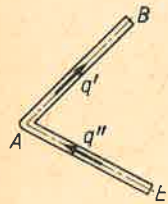
$$M_q = (T_1 + T_5) b + T_2 h = 0,29 \cdot 0,07 + 3,59 \cdot 0,10 = 0,379 \text{ kNm}$$

i ma zwrot współzegarowy. Ten sam moment  $M_T = M_q$  musi dać siła wypadkowa  $T_z = 10 \text{ kN}$ , wobec czego musi ona działać na lewo od  $O$ , a jej ramię

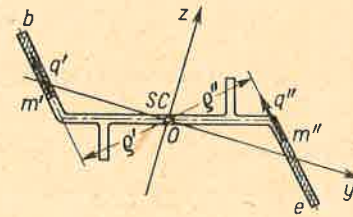
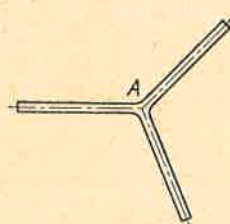
$$|e_y| = M_q/T_z = 0,0379 \text{ m} = 3,79 \text{ cm}.$$

Powyższy sposób jest przejrzystszy od mechanicznego stosowania wzoru (13.5), gdyż daje jasny obraz gry sił.

6. W profilach (rys. 13.8) ścianki są płaskie i schodzą się w węzle  $A$  (rys. 13.8). Udowodnić, że węzeł ten jest środkiem sił poprzecznych.



Rys. 13.8.



Rys. 13.9.

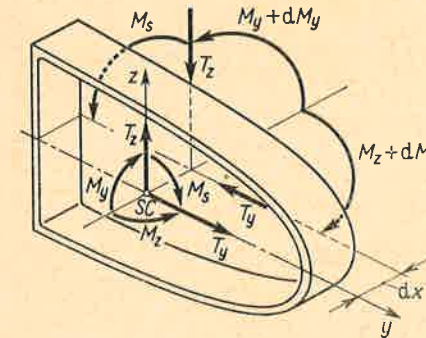
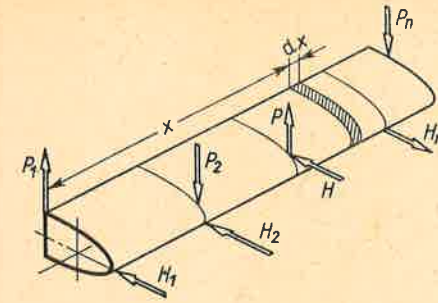
Rozwiązanie. Wypadkowa wydatków  $q'$  w ścianie  $AB$  działa wzdłuż linii  $AB$ , podobnie wypadkowa z  $q''$  działa wzdłuż  $AE$ . Ich łączna wypadkowa, równa sile tnącej, przechodzi więc *zawsze* przez punkt  $A$ , który wobec tego jest środkiem sił poprzecznych.

7. Udowodnić, że w profilu punktowoosymetrycznym (rys. 13.9) środki: ciężkości  $SC$  i sił poprzecznych  $SP$  pokrywają się.

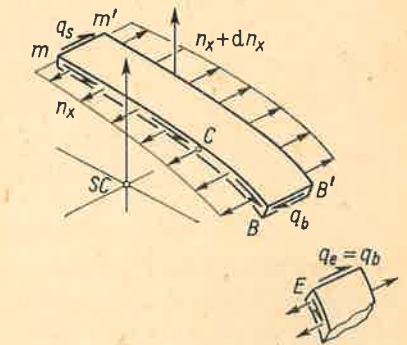
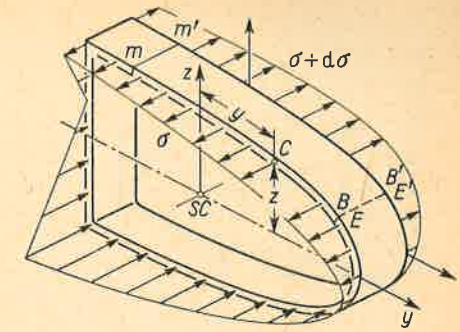
Rozwiązanie. Dla symetrycznie położonych punktów  $m'$  i  $m''$  wydatki  $q'$  i  $q''$  oraz promienie  $\rho'$  i  $\rho''$  są równe. Ponieważ momenty  $q' \rho' ds$  i  $q'' \rho'' ds$  znoszą się i całki we wzorach (13.5) też są równe zeru, a więc  $e_y = e_z = 0$ .

## 13.2. Rury jednoobwodowe

Działanie dowolnego układu obciążeń poprzecznych wywołuje w badanym plasterku takiej rury wysiłek o składowych  $M_y, M_z, M_s, T_y$  i  $T_z$  (rys. 13.10). Przyjmujemy, że naprężenia normalne  $\sigma$  (rys. 13.11) zależą tylko od momentów  $M_y$  i  $M_z$  i określone są jak



Rys. 13.10. Obciążenie i wysiłek przekroju w rurze jednoobwodowej

Rys. 13.11. Określenie naprężeń  $\sigma$  i wydatków  $q_s$  w rurze

przy zgięciu poprzecznym prętów o przekroju otwartym, z wzoru (6.1a), a wydatki  $n_x$  z wzoru (13.3).

Aby z kolei określić wydatki  $q_s$ , wprowadźmy dodatkowe przecięcie  $BB'$  badanego plasterka rury. Na powstałych przy tym krawędziach  $BB'$  i  $EE'$  uwidocznione zostają wydatki  $q_b$  i  $q_e = q_b$ . W ten sposób wyznaczenie  $q_s$  w badanym punkcie  $m$  sprowadza się do znanego schematu (rys. 13.2) ze znaną wartością  $n_x$ . Wynik ostateczny różni się od wzoru (13.4) tylko tym, że obecnie występuje również składnik  $q_b$ , którego poprzednio nie było. Wobec tego

$$q_s = q_b + \frac{T_z S_y^{(s)}}{J_y} + \frac{T_y S_z^{(s)}}{J_z}, \quad (13.6a)$$

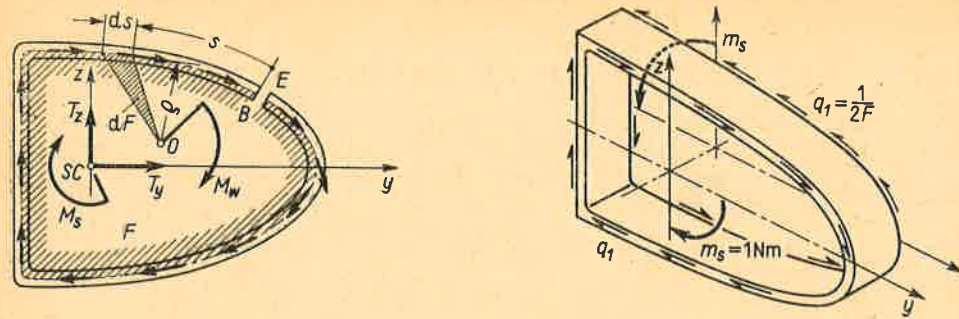
gdzie  $S_y^{(s)}, S_z^{(s)}$  — momenty statyczne pola przekroju odcinka  $Bm$ .

Nie znany na razie wydatek  $q_b$  wyznaczamy z warunku równoważności<sup>(1)</sup> sumy elementarnych momentów  $q_s ds \rho$  względem dowolnie obranego punktu  $O$  i momentu  $M_w$ , jaki względem tegoż punktu dają siły  $T_z, T_y$  i moment  $M_s$  (rys. 13.12), czyli

$$M_w = \int_0^{s_c} q_s \rho ds = q_b \int_0^{s_c} \rho ds + \frac{T_z}{J_y} \int_0^{s_c} S_y^{(s)} \rho ds + \frac{T_y}{J_z} \int_0^{s_c} S_z^{(s)} \rho ds. \quad (a)$$

<sup>(1)</sup> Pozostałe warunki, tj. sumy rzutów na osie  $y$  i  $z$ , są tak jak w profilach otwartych spełnione tożsamościowo.





Rys. 13.12. Wydatki styczne w rurze jednoobwodowej

Zauważając, że  $\varrho ds = 2 dF$ , a suma takich składników jest podwojonym polem  $F$  ograniczonym środkową linią konturu mamy

$$q_b = \frac{M_w}{2F} - \frac{1}{2F} \left[ \frac{T_z}{J_y} \int_0^{s_c} S_y^{(s)} \varrho ds + \frac{T_y}{J_z} \int_0^{s_c} S_z^{(s)} \varrho ds \right]. \quad (13.7a)$$

Wartość ta podstawiona do (13.6a) daje odpowiedź ostateczną.

Sam proces obliczeń zaleca się prowadzić w dwóch etapach. W pierwszym określamy wydatek  $q'$  i moment  $M'_q$

$$q' = \frac{T_y S_y^{(s)}}{J_y} + \frac{T_z S_z^{(s)}}{J_z}, \quad M'_q = \frac{T_z}{J_y} \int_0^{s_c} S_y^{(s)} \varrho ds + \frac{T_y}{J_z} \int_0^{s_c} S_z^{(s)} \varrho ds \quad (b)$$

odpowiadające profilowi otwartemu ze swobodnymi krawędziami w miejscu  $BE$  i tym samym konturze co dana rura. Wykorzystujemy przy tym wszystkie uwagi z art. 13.1. W etapie drugim obliczamy wydatek  $q_b$  w miejscu przecięcia  $BE$

$$q_b = (M_w - M'_q)/2F, \quad (13.7b)$$

a następnie całkowity wydatek styczny

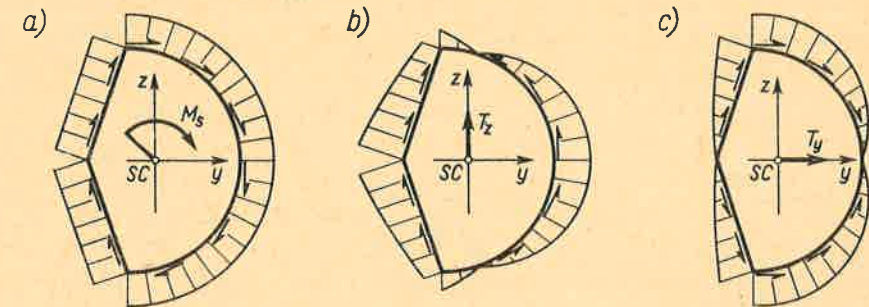
$$q_s = q_b + q'. \quad (13.6b)$$

Dla uniknięcia błędów zaleca się podawanie wyników każdego etapu na obrazie przekroju. I tak, po obliczeniu  $q'$  наносimy tę wielkość na rysunek przekroju, co następnie ułatwia bezbłędne określenie  $M'_q$ . Ta sama uwaga odnosi się do  $q_b$ .

Wartość  $q_s$  nie zależy od miejsca, w którym dokonujemy myślowego przecięcia  $BE$ , wpływa jednak na pośrednie etapy obliczeń. Jeśli bowiem przecięcie to oberzemy raz w jednym, a drugi raz w innym punkcie  $B$ , to w danym punkcie  $m$  (rys. 13.11) otrzymamy różne wartości  $S_y$  i  $S_z$ , a więc różne wartości  $q'$ , a następnie różne wartości  $q_b$ . Końcowy jednak wynik, tj. rozkład  $q_s$  po obwodzie, będzie ten sam. Charakter tego rozkładu zależy od rodzaju obciążenia. Jeśli na przykład siły tnące są równe zeru (rys. 13.13a), to  $q' = 0$ , moment  $M_w = M_s$  i wtedy

$$q_s = q_b = M_s/2F = \text{const}, \quad (c)$$

co jest powtórzeniem znanego już wzoru (3.22). Gdy działa tylko siła  $T_z$ , bieg  $q_s$  wykazuje zmianę zwrotu (rys. 13.13b), tak że na części obwodu jest on współzegarowy, a na drugiej przeciwwzegarowy. To samo jest w przypadku działania siły  $T_y$ .

Rys. 13.13. Typowe rozkłady wydatku  $q_s$  w rurze jednoobwodowej

Działanie momentów gnących powoduje ugięcie rury, które wyznaczamy jak dla prętów o przekroju zwartym (art. 5.8 i 6.1). Istnienie wydatków  $q_s$  powoduje skręcanie rury, określone względnym skreśleniem  $\theta$  rad/m. Jego wartość wyznaczamy stosując ogólną metodę z art. 9.4, przy czym jako „czujnik” bierzemy zespół dwu przeciwnych momentów  $m_s = 1 \text{ N m}$  (rys. 13.12). Odpowiadający temu jednostkowemu obciążeniu wydatek  $q_1 = 1/2 F = \text{const}$ . Przesunięcie wywołane działaniem  $T_y$ ,  $T_z$  i  $M_s$  jest  $\gamma \cdot 1 = (\tau/G) \cdot 1 = = q_s/G\delta$ , wobec czego praca elementarnej siły  $q_1 ds$  na tym przesunięciu wynosi

$$q_1 ds \gamma \cdot 1 = q_s ds/2GF\delta. \quad (d)$$

Zgodnie z ogólną regułą wyznaczania przemieszczeń szukany kąt  $\theta$  jest równy liczbowo sumie tych prac we wszystkich elementach badanego jednostkowego plasterka, czyli

$$\theta = \frac{1}{2GF} \int_0^s \frac{q_s ds}{\delta}. \quad (13.8)$$

Wynik (13.8) stanowi uogólnienie znanej już zależności (3.23), którą otrzymamy wstawiając w (13.8) wydatek  $q_s = M_s/2F = \text{const}$ .

Podstawowym założeniem w przeprowadzonej tu analizie było, że naprężenia  $\sigma_x$  zależą od  $M_y$  i  $M_z$  nie zależą natomiast od  $M_s$ , czyli że przy skręcaniu rury nie występują naprężenia normalne. Jak wynika ze ściślejszych rozważań, jest to słuszne, gdy rura jest długa i moment  $M_s$  stały lub łagodnie zmienny. Gdy rura jest krótka, istotny wpływ na jej zachowanie się przy skręcaniu odgrywa sposób podparcia przekrojów końcowych. W takim przypadku, jak również przy raptownych zmianach wartości  $M_s$ , pojawiają się lokalne naprężenia normalne zanikające szybko w miarę oddalania się od przekroju końcowego bądź od miejsca raptownej zmiany  $M_s$ . Zjawisko to ma identyczny charakter, jak opisane w art. 2.1, zakłócenia rozkładu naprężeń. Ich zasięg jest rzędu maksymalnego wymiaru poprzecznego rury. Jeśli rura jest długa, to podobnie jak w prętach o przekroju zwartym, tego zjawiska zakłóceń nie uwzględniamy w obliczeniach.

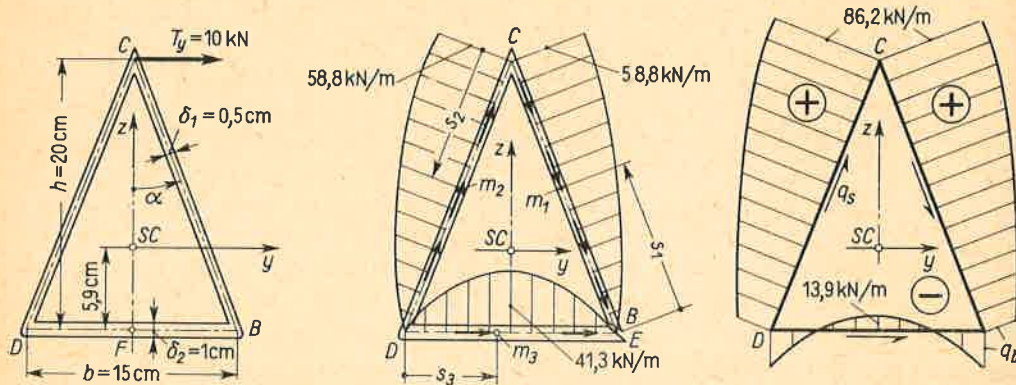


## Zadania

1. Wyznaczyć przebieg  $q_s$  w rurze trójkątnej (rys. 13.14), której obciążenie poprzeczne stanowi siła  $T_y$  w wierzchołku  $C$ .

Rozwiązanie. Po obliczeniu momentu  $J_z = 680 \text{ cm}^4$ , poprowadzeniu myślowego przecięcia w narożu  $B$ , ustaleniu obiegu  $BCDE$  określamy dla takiego przekroju otwartego momenty statyczne  $S_z^{(s)}$ . I tak dla punktu  $m_1$  mamy

$$S_z^{(s)} = s_1 \delta_1 (b - s_1 \sin \alpha) / 2, \quad \text{przy czym} \quad \text{tg } \alpha = b/2h = 0,375.$$

Rys. 13.14. Przykład określenia  $q_s$  w rurze trójkątnej

Dla symetrycznie położonego punktu  $m_2$ , moment  $S_z^{(s)}$  jest taki sam, a dla punktu  $m_3$  na ścianie  $DE$

$$S_z^{(s)} = -s_3 \delta_2 (b - s_3) / 2.$$

Mając  $S_z^{(s)}$  obliczamy  $q'$  z wzoru (b) w szeregu punktów obwodu. Dla przykładu w punktach  $B$ ,  $D$  i  $E$  otrzymujemy  $q'_B = q'_D = q'_E = 0$ , a w punktach  $C$  ( $s_1 = b/2 \sin \alpha$ ) i  $F$  ( $s_3 = b/2$ )

$$q'_C = \frac{10^4 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}{680 \cdot 10^{-8}} = 58,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad q'_F = \frac{10^4 (-28,1 \cdot 10^{-6})}{680 \cdot 10^{-8}} = -41,3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

Po wrysowaniu przebiegu  $q'$  na obrazie przekroju obliczamy  $M'_q$  względem naroża  $D$ , gdyż tak jest najprościej. Wypadkowa  $T_{BC}$  z wydatków  $q'$  na boku  $BC$  jest

$$T_{BC} = \int_0^{b/2 \sin \alpha} q' ds_1 = \frac{T_y}{J_z} \int_0^{b/2 \sin \alpha} \frac{s_1 \delta_1 (b - s_1 \sin \alpha)}{2} ds_1 = \frac{T_y b^3 \delta_1}{24 J_z \sin^2 \alpha} = 8,36 \text{ kN},$$

a jej ramię działania  $b \cos \alpha = 0,141 \text{ m}$ , wobec czego

$$M'_q = 8,36 \cdot 0,141 = 1,18 \text{ kNm}.$$

Moment ten łącznie z momentem  $2Fq_b$  odpowiadającym nieznanemu wydatkowi  $q_b$  musi być równy momentowi  $T_y h$ , czyli

$$q_b 2F + M'_q = T_y h,$$

skąd dla  $2F = bh = 0,03 \text{ m}^2$  i  $h = 0,2 \text{ m}$  mamy

$$q_b = 27,4 \text{ kN/m}.$$

Ponieważ  $q_b > 0$ , zatem zgodnie z umową zwrot  $q_b$  jest jak zwrot  $q'$  na części  $BCD$ . Wypadkowy wy-

datek  $q_s$  jest sumą  $q_b$  i  $q'$  (wzór 13.6b), a jego przebieg taki jak na rysunku. Największy wydatek i naprężenia  $\tau$  występują w punkcie  $C$ , przy czym

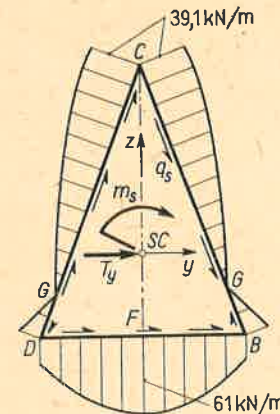
$$\tau_c = (q_s)_c / \delta_c = 86,2 \cdot 10^3 / 0,5 \cdot 10^{-2} = 17,2 \text{ MPa}.$$

2. Jak zmieni się tok rozwiązania zadania 1, gdy siła  $T_y$  przyłożona jest w środku ciężkości (rys. 13.15)? Czy przy takim obciążeniu względne skrócenie  $\Theta$  jest równe zero?

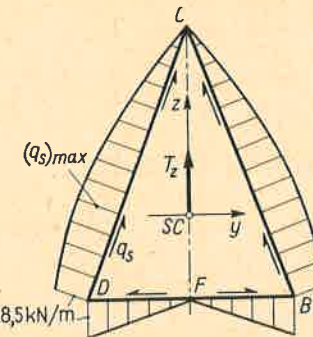
Rozwiązanie. Gdy myślowe przecięcie jest nadal w narożu  $B$ , wówczas obraz  $q'$ , wartość  $T_{BC}$  oraz moment  $M'_q$  zostają te same. Zmienia się natomiast moment siły  $T_y$ , wynoszący teraz  $10^4 \cdot 0,059 = 590 \text{ Nm}$ , wobec czego równania równowagi momentów

$$q_b = (590 - 1180) / 0,03 = -19,7 \text{ kN/m}.$$

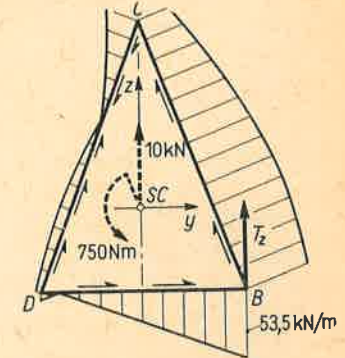
Wartość  $q_b < 0$  oznacza, że zwrot  $q_b$  jest zgodny z założonym obiegiem  $BCDB$  po konturze. Superpozycja  $q'$  z rys. 13.14 i  $q_b = \text{const}$  daje obraz  $q_s$  podany na rysunku.



Rys. 13.15.



Rys. 13.16.



Rys. 13.17.

Aby określić względne skrócenie  $\Theta$ , obciążamy przekrój „czujnikiem”  $m_s = 1 \text{ Nm}$ , dla którego wydatek  $q_1 = 1/2F$  ma zwrot zgodny z  $q_s$  na części  $GCG$  konturu, a przeciwny do  $q_s$  na części  $GDBG$ . Na skutek tego przy obliczeniu całki (13.8) należy wziąć na pierwszej części  $q_s > 0$ , na drugiej  $q_s < 0$ . Samo całkowanie rozdzielamy w następujący sposób:

$$\int_0^{s_c} q_s ds = q_b \int_0^{s_c} \frac{ds}{\delta} + \frac{1}{\delta_1} \int_{BC} q' ds + \frac{1}{\delta_1} \int_{CD} q' ds - \frac{1}{\delta_2} \int_{DB} q' ds.$$

Biorąc  $q_b = -19,7 \text{ kN/m}$  i długości boków  $l_{BC} = l_{CD} = 0,214 \text{ m}$ ,  $l_{DB} = b$  mamy

$$q_b \int_0^{s_c} \frac{ds}{\delta} = q_b \left( \frac{l_{BC}}{\delta_1} + \frac{l_{CD}}{\delta_1} + \frac{b}{\delta_2} \right) = -19,8 \cdot 10^5 \text{ N/m}.$$

Zauważając, że  $\int q' ds$  jest wypadkową siłą z wydatków  $q'$  na danym boku, mamy przy wykorzystaniu rys. 13.14 i zadania 1

$$\int_{BC} q' ds = \int_{CD} q' ds = 8,36 \text{ kN}, \quad \int_{DB} q' ds = \frac{2}{3} \cdot 41,3 \cdot 0,15 = 4,13 \text{ kN},$$

wobec czego wartość całki we wzorze (13.8) jest

$$\int_0^{s_c} q_s ds = -19,8 \cdot 10^5 + 2 \frac{8,36 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10^{-2}} - \frac{4,13 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-2}} = 9,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}.$$



Przyjmując, że rura jest stalowa ( $G = 7,7 \cdot 10^4$  MPa), mamy

$$\Theta = \frac{9,5 \cdot 10^5}{7,7 \cdot 10^{10} \cdot 0,03} = 4,1 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{m}} \approx 0,023^\circ/\text{m}.$$

Wartość  $\Theta > 0$  świadczy, że obrót przekroju jest zgodny z  $m_s$ . Widać, że siła tnąca przyłożona w środku ciężkości przekroju powoduje na ogół jego skręcenie.

3. Obliczyć rozkład  $q_s$  w rurze z zadania 1, gdy obciążenie stanowi siła  $T_z = 10$  kN (rys. 13.16).

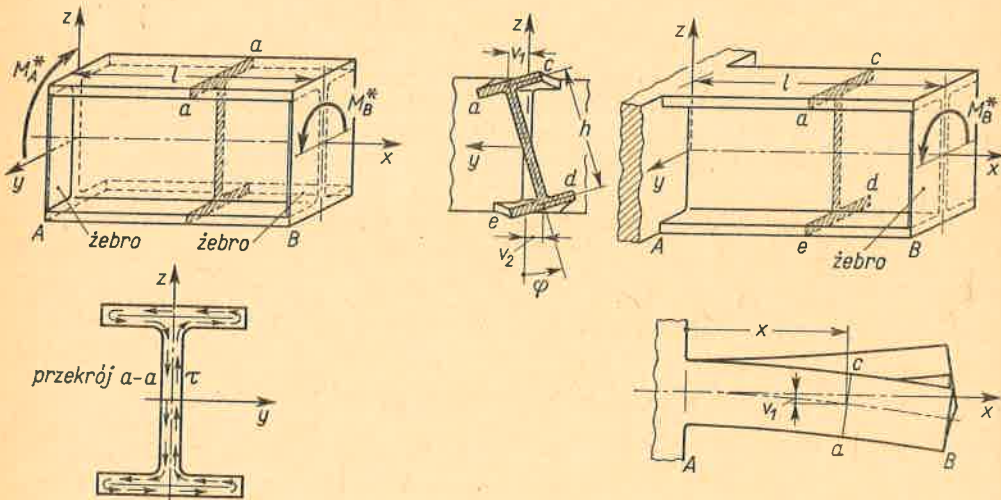
Odp. Z racji symetrii i przekroju, i obciążenia obraz  $q_s$  musi być też symetryczny, wobec czego w punktach C i F jest  $q_s = 0$ . Prowadząc myślowe przecięcie w punkcie C, mamy tam  $q_c = 0$ , a  $q_s = T_z S_y^{(s)} / J_y$  obliczamy jak dla profilu otwartego. Obraz  $q_s$  podaje rysunek, przy czym  $(q_s)_{\max} = 34,2$  kN/m, a  $\tau_{\max} = 6,8$  MPa.

4. Wykorzystując wyniki zadania 3 określić rozkład  $q_s$ , gdy siła  $T_z = 10$  kN działa w narożu B (rys. 13.17).

Odp. Obciążenie można przedstawić jako superpozycję siły przyłożonej w SC i momentu  $T_z b/2 = 750$  N m. Wydatek  $q_{s1}$  odpowiadający pierwszemu obciążeniu jest już znany, a odpowiadający momentowi wydatek  $q_{s2} = T_z b/4F = 25$  kN/m = const. Całkowity wydatek  $q_s = q_{s1} + q_{s2}$ , a jego przebieg jak na rysunku.

### 13.3. Nieswobodne skręcanie profilu dwuteowego

Omawiając pracę profilu otwartego (art. 13.1) wydzielono jako osobne zagadnienie skręcania. Powodem jest to, że przy skręcaniu tych profili obraz odkształceń i naprężeń zależy bardzo od sposobu podparcia pręta. Jeśli mianowicie momenty skręcające przyłożone są tylko na swobodnych końcach pręta (rys. 13.18), to ten przypadek tzw. swobodnego



Rys. 13.18. Skręcanie swobodne

Rys. 13.19. Nieswobodne skręcanie dwuteówki

skręcania jest już znany z art. 3.6. Cechuje się on tym, że względne skręcenie  $\Theta = \text{const}$ , oraz tym, że w przekrojach poprzecznych istnieją tylko naprężenia styczne  $\tau$ , których bieg przypomina krążenie cieczy. Przekroje poprzeczne nie zostają przy tym płaskie, lecz

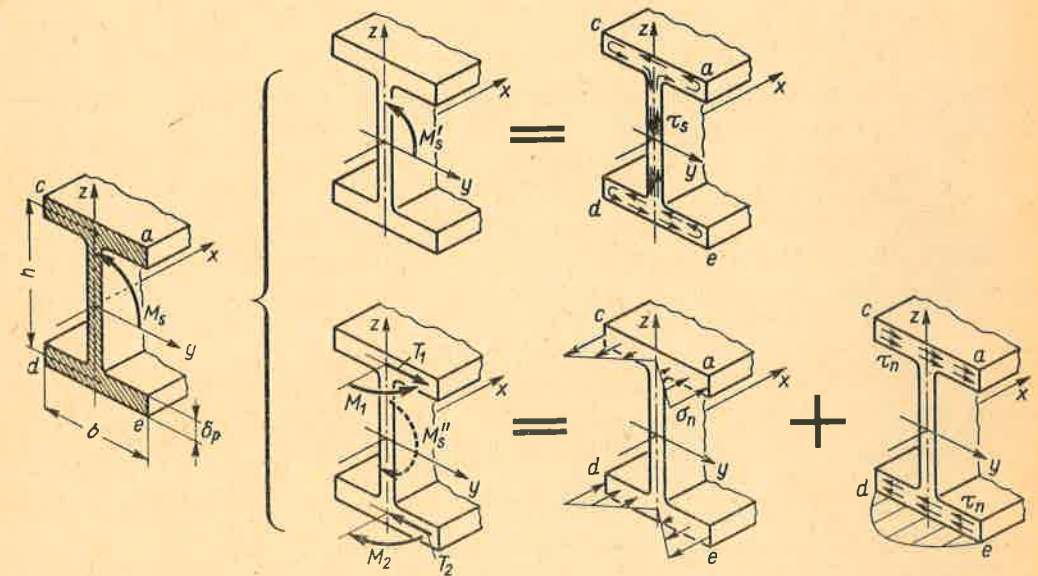
ulegają tzw. *spaczeniu*, jednakowemu na całej długości pręta (rys. 3.13). Pokazano też, że przy skręcaniu swobodnym sztywność profilu otwartego jest mała, a wartości naprężeń  $\tau$  nawet przy małym obciążeniu mogą być bardzo duże.

Odmienny obraz otrzymujemy przy tzw. *nieswobodnym skręcaniu*, gdy przez stosowne podparcie blokujemy swobodę spaczenia w jednym co najmniej przekroju pręta. Przykładem tego jest wspornikowy dwuteowy pręt (rys. 13.19), w którym utwierdzony przekrój A musi zostać płaski, wobec czego każda z półek profilu zachowuje się jak wspornikowa belka zginana w płaszczyźnie równoległej do  $xy$ . Z racji symetrii profilu ugięcia  $v_1$  i  $v_2$  tych półek są przeciwne i mają wartości

$$v_1 = \varphi h/2, \quad v_2 = -\varphi h/2, \quad (a)$$

gdzie  $\varphi$  — kąt obrotu badanego przekroju. Tym ugięciom towarzyszą naprężenia normalne w półkach. Widać przy tym, że we włóknie  $a$  górnej półki są to naprężenia ściskające, a we włóknie  $c$  rozciągające, podczas gdy we włóknach  $e$  i  $d$  dolnej półki sytuacja jest odwrotna.

Z podanego opisu wynika, że przeniesienie momentu skręcającego  $M_s$  w badanym przekroju idzie dwoma równoległymi nurtami (rys. 13.20). Z jednej bowiem strony skrę-



Rys. 13.20. Obraz składowych wysiłku i naprężeń przy nieswobodnym skręcaniu dwuteówki

cenie pręta wywołuje obraz naprężeń  $\tau_s$  jak przy swobodnym skręcaniu. Odpowiadający temu moment  $M'_s$  związany jest z kątem  $\varphi$  znanymi zależnościami (3.19), (3.20)

$$M'_s = GJ_s \Theta = C \Theta = C d\varphi/dx, \quad (b)$$

gdzie  $J_s$  określone jest wzorem (3.26). Z drugiej jednak strony zginaniu półek w ich płaszczyznach odpowiada obraz naprężeń normalnych  $\sigma_n$  dających w górnej i dolnej półce

momenty gnące  $M_1 = -M_2$ . Ich wartości można wyrazić przez ugięcie  $v$ , a mianowicie z wzoru (5.20)

$$M_1 = EJ \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{EJh}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{EJh}{2} \frac{d\theta}{dx}, \quad (c)$$

gdzie  $J = b^3 \delta_p / 12$  — moment bezwładności jednej półki względem jej centralnej osi  $z$ . Momenty te, jak wynika z obrazu odkształceń, są zmienne wzdłuż  $x$ , wobec czego w każdej z półek musi wystąpić siła tnąca  $T_1 = -T_2 = dM_1/dx$ , czyli

$$T_1 = \frac{EJh}{2} \frac{d^2 \theta}{dx^2}. \quad (d)$$

Dla profilu jako całości działanie sił  $T$  sprowadza się do momentu  $M_s''$  stanowiącego tę część  $M_s$ , która wynika ze zginania półek. Jeśli  $d^2 \theta / dx^2 > 0$ , to zwroty sił  $T$  są jak na rysunku, wobec czego  $M_s''$  jest ujemny, co zaznaczymy pisząc

$$M_s'' = -T_1 h = -\frac{EJh^2}{2} \frac{d^2 \theta}{dx^2} = -C_s \frac{d^2 \theta}{dx^2}, \quad (13.9)$$

gdzie  $C_s$  — tzw. sztywność na nieswobodne skręcanie

$$C_s = \frac{EJh^2}{2} = \frac{Eb^3 h^2 \delta_p}{24} \text{ Nm}^4. \quad (13.10)$$

Całkowity moment  $M_s$  w badanym przekroju jest sumą  $M_s'$  i  $M_s''$ , wobec czego z wzorów (b) i (13.9) mamy równanie

$$-C_s \frac{d^2 \theta}{dx^2} + C\theta = M_s, \quad (13.11)$$

określające wielkość  $\theta$ . Rozwiązanie tego równania w przypadku pręta (rys. 13.19), gdy  $M_s = M_B^* = \text{const}$ , ma postać

$$\theta = \frac{M_B^*}{C} + B_1 \sinh kx + B_2 \cosh kx, \quad (e)$$

gdzie  $k = \sqrt{C/C_s} \text{ m}^{-1}$ . Aby wyznaczyć stałe całkowania  $B_1$  i  $B_2$ , zauważmy, że w przekroju utwierdzonym ( $x = 0$ ) kąt ugięcia półki jest równy zeru, czyli  $dv_1/dx = 0$ , a więc z wzoru (a)

$$(\theta)_{x=0} = 0, \quad (f)$$

natomiast na końcu  $B$  ( $x = l$ ) nie ma naprężeń normalnych  $\sigma_n$ , a więc momenty  $M_1$  i  $M_2$  są równe zeru i z wzoru (c)

$$(d\theta/dx)_{x=l} = 0. \quad (g)$$

Po wykorzystaniu tych warunków równanie (e) brzmi

$$\theta = \frac{M_B^*}{C} \left[ 1 - \frac{\cosh k(l-x)}{\cosh kl} \right]. \quad (h)$$

Mnożąc ten wynik przez  $C$ , mamy zgodnie z wzorem (b)

$$M_s' = C\theta = M_B^* \{ 1 - [\cos k(l-x)/\cosh kl] \} \quad (i)$$

jako tę część momentu skręcającego, którą równoważą naprężenia  $\tau_s$ , jak przy swobodnym skręcaniu. Reszta, czyli

$$M_s'' = M_s - M_s' = M_B^* \cosh k(l-x)/\cosh kl, \quad (j)$$

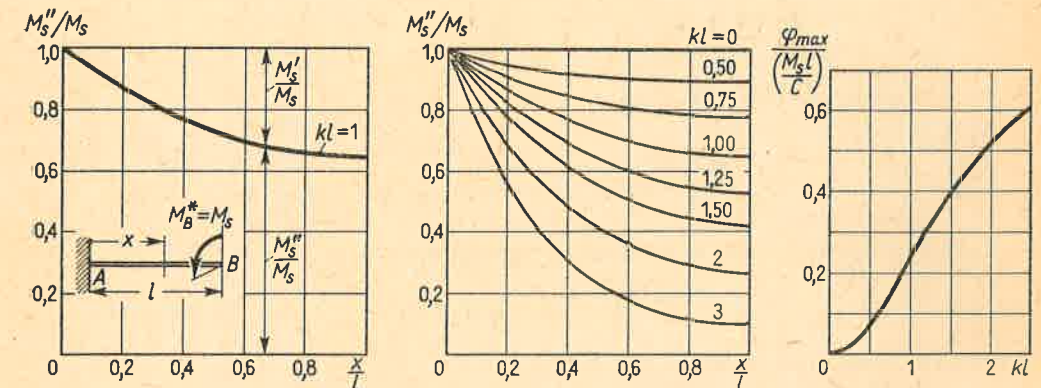
przedstawia część momentu odpowiadającą zginaniu półek. Kąt skręcenia  $\varphi$  określamy całkując równanie (h) przy warunku, że  $(\varphi)_{x=0} = 0$ , w rezultacie czego

$$\varphi = \frac{M_B^* x}{C} - \frac{M_B^*}{C_s k} \frac{\sinh kl - \sinh k(l-x)}{\cosh kl}, \quad (k)$$

a jego ekstremalna wartość dla  $x = l$  jest

$$\varphi_{\max} = \frac{M_B^* l}{C} \left( 1 - \frac{\text{tgh} kl}{kl} \right). \quad (l)$$

Analizę wyników rozpoczniemy od zbadania momentów  $M_s'$  i  $M_s''$ . Przebieg  $M_s''/M_s$  dla  $kl = 1$  ilustruje rys. 13.21. Jak widać, udział  $M_s''$  jest dominujący w okolicy utwierdzenia



Rys. 13.21. Wyniki analizy nieswobodnego skręcania pręta

i maleje przy zbliżaniu się do swobodnego końca pręta. Odwrotnie przedstawia się udział  $M_s'$  stanowiący dopełnienie do wartości  $M_s$ . Ten sam charakter mają wykresy dla innych wartości parametru  $kl$ . Widać przy tym, że dla prętów, w których  $kl < 0,5$ , udział swobodnego skręcania jest technicznie pomijalny i prawie cały moment skręcający przeniesiony jest przez zginanie półek.

Wpływ utwierdzenia przejawia się również w zmniejszeniu kąta skręcenia, jak to widać z wykresu, na którym  $\varphi_{\max}$  podane jest w funkcji  $kl$ . Wielkością porównawczą jest tu kąt skręcenia

$$M_B^* l / C,$$

jaki by istniał przy swobodnym skręceniu, tj. bez utwierdzenia. Dla przykładu, gdy  $kl = 0,5$ , wówczas  $\varphi_{\max}$  jest tylko 8% wartości  $M_B^* l / C$ . Uwzględniając poprzednie rozważania widzimy więc, że dla prętów, w których  $kl < 0,5$ , wpływ swobodnego skręcania jest nie-



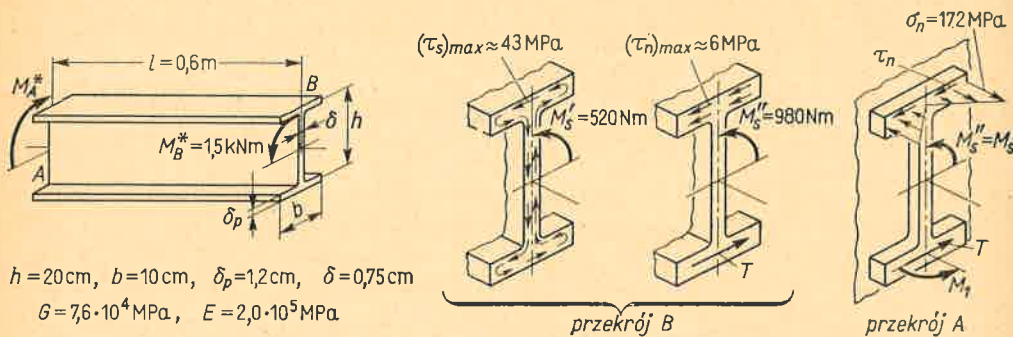
istotny. W takim przypadku można z techniczną dokładnością pominąć w równaniu (13.11) człon  $C\theta$  i przyjąć, że

$$d^2\theta/dx^2 \approx -M_s/C_s. \quad (13.12)$$

Zależność tę wykorzystujemy w wielu zagadnieniach ustrojów cienkościennych, dla których warunek  $kl < 0,5$  jest na ogół spełniony.

### Zadania

1. Jak zmieni się współczynnik bezpieczeństwa i kąt skręcenia dwuteówki (rys. 13.22), jeśli utwierdzić koniec  $A$ ?



$$h=20\text{cm}, b=10\text{cm}, \delta_p=1,2\text{cm}, \delta=0,75\text{cm}$$

$$G=7,6 \cdot 10^4 \text{MPa}, E=2,0 \cdot 10^5 \text{MPa}$$

Rys. 13.22. Analiza liczbowa wpływu utwierdzenia

Rozwiązanie. Gdy końce są swobodne, wówczas według (3.26)

$$J_s = \frac{\sum s_i \delta_i^3}{3} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 1,2^3 + 20 \cdot 0,75^3}{3} = 14,3 \text{ cm}^4, \quad W_s = \frac{J_s}{\delta_{\max}} = \frac{14,3}{1,2} = 11,9 \text{ cm}^3,$$

wobec czego maksymalne naprężenie styczne

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_s} = \frac{M_B^*}{W_s} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{11,9 \cdot 10^{-6}} = 126 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 126 \text{ MPa},$$

a  $\sigma_{\text{red}} = \tau_{\max} \sqrt{3} = 218 \text{ MPa}$  i  $n_e = R_e/\sigma_{\text{red}} = 1,32$ . Ponieważ sztywność na skręcanie swobodne  $C = GJ_s = 1,09 \cdot 10^4 \text{ N m}^2$ , zatem

$$\varphi_s = M_B^*/C = 1,5 \cdot 10^3 \cdot 0,6 / 1,09 \cdot 10^4 = 8,3 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 4,75^\circ.$$

Aby określić wpływ utwierdzenia, obliczamy najpierw wielkości

$$C_s = \frac{Eb^3 h^2 \delta_p}{24} = 4,00 \cdot 10^3 \text{ Nm}^4, \quad k = \sqrt{C/C_s} = 1,650 \text{ m}^{-1}, \quad kl = 0,99.$$

Z rysunku 13.21 wynika, że niebezpieczny jest albo przekrój swobodny, albo utwierdzony. W pierwszym  $x = l$  i z wzoru (j)

$$M_s'' = M_B^*/\cosh kl = 1,5 \cdot 10^3 / \cosh 0,99 = 1,5 \cdot 10^3 / 1,531 = 980 \text{ Nm},$$

a moment  $M_s' = M_B^* - M_s'' = 520 \text{ Nm}$ . Moment  $M_s''$  daje siły tnące  $T = M_s''/h = 4,9 \text{ kN}$ , którym odpowiadają naprężenia  $\tau_n$  (rys. 13.20) rozłożone parabolicznie wzdłuż półki (art. 5.6), przy czym

$$(\tau_n)_{\max} = 3T/2b\delta_p = 3 \cdot 4,9 \cdot 10^3 / 2 \cdot 10 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} = 6,1 \text{ MPa}.$$

Momentowi  $M_s'$  odpowiadają naprężenia  $\tau_s$  o wartości

$$(\tau_s)_{\max} = M_s'/W_s = 520/11,9 \cdot 10^{-6} = 42,9 \text{ MPa}.$$

W przekroju tym  $\sigma_n = 0$ , a z obrazu naprężeń stycznych (rys. 13.20) wynika, że  $\tau_n$  i  $\tau_s$  dodają się algebraicznie, wobec czego

$$(\tau_{\max})_B = (\tau_s)_{\max} + (\tau_n)_{\max} = 49 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\text{red}} = (\tau_{\max})_B \sqrt{3} \approx 85 \text{ MPa}.$$

W przekroju utwierdzonym ( $x = 0$ ) mamy  $M_s' = 0$ ,  $M_s'' = M_B^*$ ,  $T = M_s''/h = 7,5 \text{ kN}$ , a moment  $M_1$  zginający półkę jest według wzoru (c)

$$\frac{EJ h}{2} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} = \frac{C_s}{h} \frac{M_B^* k \operatorname{tgh} kl}{C} = M_B^* \frac{\operatorname{tgh} kl}{kh} = 1,5 \cdot 10^3 \frac{\operatorname{tgh} 0,99}{1,650 \cdot 0,2} = 3,44 \text{ kNm}.$$

Niebezpiecznym punktem przekroju jest krawędź półki, gdzie

$$(\sigma_n)_{\max} = 6M_1/b^2 \delta_p = 6 \cdot 3,44 \cdot 10^3 / 10^2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} = 172 \text{ MPa}.$$

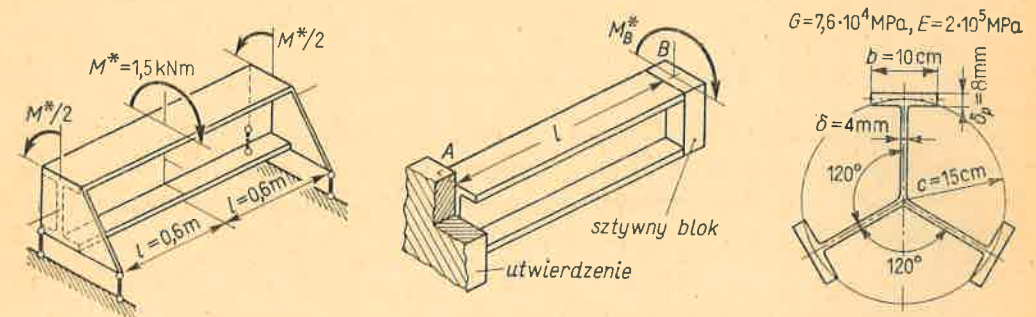
Ponieważ w tym punkcie  $\tau_n = 0$ , zatem  $\sigma_{\text{red}} = (\sigma_n)_{\max}$  i  $n_e = R_e/\sigma_{\text{red}} = 1,75$ .

Wreszcie według wzoru (l) kąt skręcenia przekroju  $B$  jest

$$\varphi_{\max} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{1,09 \cdot 10^4} \left( 1 - \frac{\operatorname{tgh} 0,99}{0,99} \right) = 1,86 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,07^\circ.$$

Jak widać, utwierdzenie przekroju zwiększa w pewnym stopniu współczynnik bezpieczeństwa i znacznie zmniejsza kąt skręcenia.

2. Opartą na końcach dwuteówkę (rys. 13.23) obciążono w środku momentem  $M^* = 1,5 \text{ kNm}$ . Przyjmując wymiary przekroju jak w zadaniu 1, określ współczynnik bezpieczeństwa i kąt skręcenia.



Rys. 13.23.

Rys. 13.24.

Rys. 13.25.

Odp. Z racji symetrii przekrój środkowy zostaje płaski, spełnia więc rolę utwierdzenia dla każdej z połówek, identycznych jak w zadaniu 1, ale obciążonych połową momentu  $M^*$ . Wynika stąd, że naprężenia i kąt skręcenia są dwa razy mniejsze niż w zadaniu 1.

3. Jak zmieni się kąt skręcenia dwuteowego wspornika (rys. 13.24), jeśli swobodny koniec zamknąć nieodkształcalnym blokiem uniemożliwiającym spaczenie tego przekroju.

Odp. Stałe  $B_1$  i  $B_2$  równania (e) określa się z warunków  $(\theta)_{x=0} = 0$  i  $(\theta)_{x=l} = 0$ . Całkowanie  $\theta(x)$  przy warunku  $(\varphi)_{x=0} = 0$  daje w rezultacie

$$\bar{\varphi} = \int_0^x \theta dx = \frac{M_B^* l}{C} \left\{ \frac{x}{l} - \frac{\sinh(kl/2) - \sinh k[(l/2) - x]}{kl \cosh(kl/2)} \right\}.$$

Maksymalny kąt  $\bar{\varphi}_{\max}$  jest dla  $x = l$ . W stosunku do wyniku (l)

$$\frac{\bar{\varphi}_{\max}}{\varphi_{\max}} = \left[ 1 - \frac{\operatorname{tgh}(kl/2)}{(kl/2)} \right] \left/ \left[ 1 - \frac{\operatorname{tgh} kl}{kl} \right] \right. < 1.$$

Przykładowo, dla danych zadania 1, gdy  $kl = 0,99$ ,  $\bar{\varphi}_{\max}/\varphi_{\max} \approx 0,333$ .



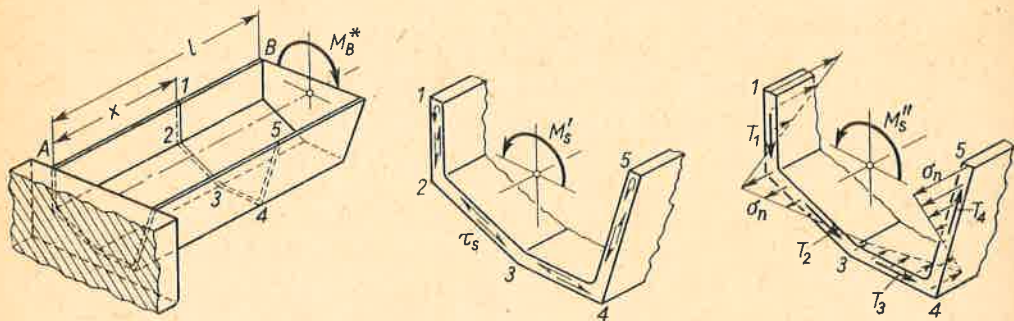
4. Określić sztywności  $C$  i  $C_s$  trójramiennego profilu (rys. 13.25).

Odp.  $C = G(c\delta^3 + b\delta_p^3) = 4,6 \cdot 10^3 \text{ N m}^2$ . Przy zginaniu półki  $T = EJ(d^3v/dx^3) = EJc(d^2\theta/dx^2)$ ,  $M'_s = 3Tc = C_s(d^2\theta/dx^2)$ , skąd

$$C_s = 3EJc^2 = Eb^3c^2\delta_p/4 = 9,0 \cdot 10^3 \text{ N m}^4.$$

### 13.4. Nieswobodne skręcanie innych profili otwartych

Zasadnicze cechy zjawisk przy nieswobodnym skręcaniu dowolnego profilu utwierdzonego na końcu  $A$  (rys. 13.26) są takie jak w profilu dwuteowym. I tak działanie momentu  $M_B^*$  powoduje obrót przekrojów, przy którym każda ze ścianek pracuje dwojako, gdyż ulega



Rys. 13.26. Nieswobodne skręcanie dowolnego profilu otwartego

ona nie tylko skręceniu, lecz i zginaniu w swej płaszczyźnie, jak wspornikowa belka utwierdzona w przekroju  $x = 0$ . Podobnie jak poprzednio (rys. 13.10), tak i tu moment skręcający  $M_s = M_B^*$  dzieli się na dwa składniki. Pierwszy, czyli  $M'_s$ , odpowiada swobodnemu skręcaniu, a więc określony jest jako

$$M'_s = GJ_s \theta = C \theta. \quad (a)$$

Składnik drugi, czyli  $M''_s$ , jest wypadkowym momentem sił tnących  $T_1, \dots, T_4$  odpowiadających zginaniu ścianek, przy którym powstają w nich naprężenia normalne  $\sigma_n$ . Gdyby te ścianki nie były ze sobą złączone na wzdłużnych krawędziach, wówczas rozkład  $\sigma_n$  w każdej z nich byłby jak przy zginaniu belek. Dla przykładu, na krawędzi 4 ścianki (3, 4) byłyby naprężenia rozciągające, a na tejże krawędzi ścianki (4, 5) — ściskające. Wynikałoby stąd, że te dwie krawędzie ślizgają się po sobie. W rzeczywistym profilu takich względnych przesunięć (ślizgania się) nie ma, albowiem na tych krawędziach istnieją wzajemne oddziaływania pod postacią wydatków stycznych wyrównujących te różnice wydłużeń<sup>(1)</sup>. Na skutek tego rozkład  $\sigma_n$  jest ciągły po konturze, czyli nie ma przeskoków, z tym że w obrębie każdej ze ścianek  $\sigma_n$  zmienia się liniowo.

Szczegółową analizę nieswobodnego skręcania dowolnego profilu podaje się w wykładach statyki konstrukcji. Głównymi jej wynikami jest, że przy nieswobodnym skręcaniu pryzmatycznego pręta:

<sup>(1)</sup> Zjawiska tego nie było w dwuteówce, gdzie ścianka łącząca półki trafiała akurat w ich osie obojętne.

a) obrót przekrojów zachodzi względem osi wzdłużnej łączącej środki sił poprzecznych (SP) przekrojów;

b) naprężenia normalne  $\sigma_n$  są proporcjonalne do  $d\theta/dx$  i określone są zależnością

$$\sigma_n = z E F_u (d\theta/dx), \quad (13.13)$$

gdzie  $E$  — moduł Younga,  $F_u$  — umownie określone pole, a  $z$  — bezwymiarowy współczynnik zależny od kształtu przekroju i położenia badanego na tym przekroju punktu;

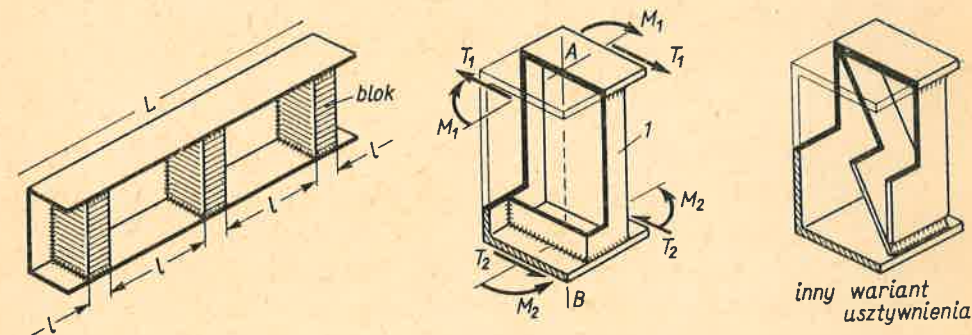
c) moment  $M''_s$  przenoszony przez siły tnące  $T$  jest proporcjonalny do  $d^2\theta/dx^2 = d^3\varphi/dx^3$ , czyli

$$M''_s = -C_s (d^2\theta/dx^2) = -C_s (d^3\varphi/dx^3), \quad (13.14)$$

gdzie  $C_s \text{ N m}^4$  — sztywność nieswobodnego skręcania jest zależna od kształtu przekroju i proporcjonalna do modułu  $E$ .

Dla trzech często stosowanych profili wielkości  $z$  i  $C_s$  daje tabl. 13.1. Informacja o  $C_s$  wystarcza do określenia  $\theta(x)$  z równania (13.11), informacje o  $z$  umożliwiają wyznaczenie pełnego obrazu naprężeń  $\sigma_n$  decydujących o bezpieczeństwie (zadanie 1 art. 13.3). Odrębną grupę stanowią profile, w których ścianki wychodzą z jednego punktu. Dla takich profili  $C_s = 0$ , co oznacza, że przeniesienie momentu  $M_s$  ma zawsze postać swobodnego skręcania, przy którym, jak wiemy, profile otwarte są wiotkie. Cecha ta stanowi zaletę w tych zagadnieniach, gdy zależy nam na podatności ustroju, nieczułości na błędy montażu itp., jest zaś wadą w przypadkach, gdy pożądana jest sztywność ustroju.

Efektywną metodą zwiększenia sztywności, a jednocześnie zmniejszenia  $\sigma_n$  w skręcanym profilu otwartym, w którym  $C_s \neq 0$ , jest skrócenie jego długości  $l$ . Zrealizowanie tego osiągamy wstawiając w krótkich odstępach elementy  $l$  (rys. 13.27), które wespół z zasadni-



Rys. 13.27. Usztywnienie profilu otwartego

czym profilem przekształcają te części pręta w bloki usuwające swobodę spaczenia w tych miejscach<sup>(1)</sup>. W wyniku zamiast pierwotnego pręta o długości  $L$ , mamy szereg krótkich prętów  $l$ , których stan jest identyczny z rozpatrzonym w zadaniu 3 art. 13.3. Podobny efekt uzyskujemy dając zamiast elementu  $l$  dwa płaskowniki, tak jak podaje rysunek.

<sup>(1)</sup> Przez dołączenie elementu  $l$  powstaje krótka rura o pionowej osi  $AB$  obciążona w płaszczyźnie  $A$  momentami  $M_1$  i siłami  $T_1$  zrównoważonymi w płaszczyźnie  $B$  momentami  $M_2$  i siłami  $T_2$ . Na takie jednak obciążenie (skręcanie) rura ta jest bardzo sztywna.



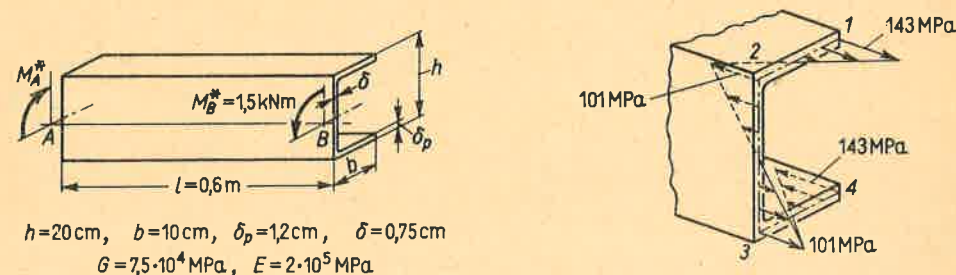
Nr	Typ profilu	Położenie SP	Obraz i wartość $\sigma_n$	Sztywność $C_s$
1		$e_y = \frac{b(1+2\psi)}{2(1+\psi+\eta)}$ $\psi = \frac{A_p}{b\delta_p}$ $\eta = \frac{h\delta}{6b\delta_p}$	$\alpha_1 = \frac{1+2\eta}{4(1+\psi+\eta)}$ $\alpha_2 = -\frac{1+2\psi}{4(1+\psi+\eta)}$ $\alpha_3 = -\alpha_2, \alpha_4 = -\alpha_1, F_u = bh$	$C_s = \frac{2Eb^3h^2\delta_p}{3} \times [\alpha_1^2(1+3\psi) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2(1+3\eta)]$
2		$SP \equiv SC$ $\psi = \frac{A_p}{b\delta_p}$ $\eta = \frac{h\delta}{6b\delta_p}$	$\alpha_1 = \frac{1+6\eta}{4(1+\psi+3\eta)}$ $\alpha_2 = -\frac{1+2\psi}{4(1+\psi+3\eta)}$ $\alpha_3 = \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1, F_u = bh$	$C_s = \frac{2Eb^3h^2\delta_p}{3} \times [\alpha_1^2(1+3\psi) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2(1+9\eta)]$
3		$e_z = \frac{h}{1+\psi}$ $\psi = \left(\frac{b''}{b'}\right)^3 \left(\frac{\delta_p''}{\delta_p'}\right)$	$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{\psi}{2(1+\psi)}$ $\alpha_3 = -\alpha_4 = \frac{1}{2(1+\psi)} \frac{b''}{b'}$ $F_u = b'h$	$C_s = \frac{Eb^3h^2\delta_p\psi}{12(1+\psi)}$
4			<p>Przy dowolnych wymiarach, grubości, liczbie i ustawieniu ścianek płaskich zawsze</p> $\sigma_n \equiv 0, C_s \equiv 0$	

Zadania

1. Powtórzyć zadanie 1 art. 13.3, gdy pręt ma przekrój ceowy (rys. 13.28) przekształcony z dwuteówki badanej poprzednio.

Odp.  $J_s, W_s$  są te same i wynik pierwszej części zadania (końce swobodne) zostaje bez zmian. W drugiej części zadania obliczamy według tabl. 13.1

$$\psi = 0, \eta = 0,208, \alpha_1 = 0,293, \alpha_2 = -0,207, F_u = 0,02 \text{ m}^2,$$



Rys. 13.28.

skąd  $C_s = 6,09 \cdot 10^3 \text{ N m}^2$  oraz  $k = \sqrt{C/C_s} = 1,338 \text{ m}^{-1}, kl = 0,802$ . Wyznaczając z wzoru (h) art. 13.3 wielkość  $d\theta/dx$  mamy w przekroju utwierdzonym

$$(d\theta/dx)_{x=0} = (M^*k/C) \text{ tgh } kl = 0,122 \text{ m}^{-2}.$$

Podstawiając te dane do wzoru (13.13) mamy ostatecznie

$$\sigma_1 = \alpha_1 EF_u(d\theta/dx)_{x=0} = 143 \text{ MPa}, \sigma_2 = -101 \text{ MPa},$$

a obraz  $\sigma_n$  taki, jak podaje rysunek. Podobnie obliczamy

$$\varphi_{max} = \frac{M_B^* l}{C} \left(1 - \frac{\text{tgh } kl}{kl}\right) = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{1,09 \cdot 10^4} \left(1 - \frac{\text{tgh } 0,802}{0,802}\right) = 1,39 \cdot 10^{-2} \text{ rad}.$$

Jak widać, przy nieswobodnym skręcaniu zmiana ustawienia ścianek profilu pociąga istotną zmianę  $\sigma_n$  i  $\varphi$ .

13.5. Uwagi ogólne o pracy prętów cienkościennych

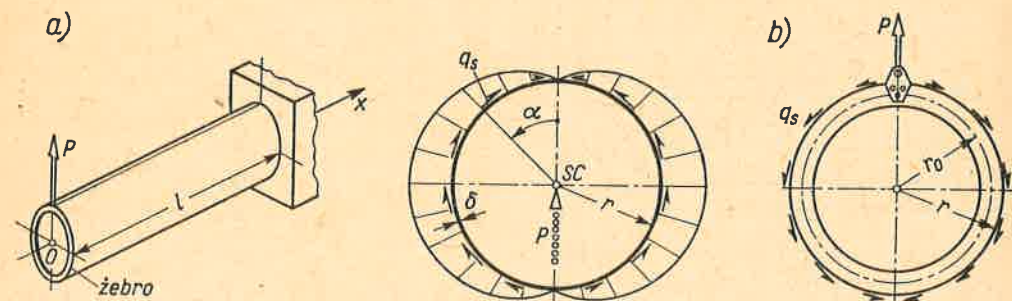
W badanych dotąd stanach obciążenia, każdy z elementów płaszcza pracuje w dwuwymiarowym stanie naprężenia, w którym można w pełni wykorzystać materiał, osiągając przez to lekkość ustroju. Aby jednak zmusić ustrój do tego rodzaju pracy, wydatki styczne  $q$  pochodzące od poprzecznych obciążeń pręta muszą być rozłożone na obwodzie płaszcza tak, jak to przewiduje teoria. Biorąc jako przykład kołową rurę (pręt) obciążoną na swobodnym końcu siłą  $P$  (rys. 13.29), spełnimy sformułowany powyżej zasadniczy postulat tylko wtedy, gdy w każdym przekroju, a więc i w obciążonym ( $x = 0$ ), rozkład wydatków  $q_s$  będzie określony z wzoru (13.6) i (13.7), czyli<sup>(1)</sup>

$$q_s = P \sin \alpha / \pi r. \tag{a}$$

<sup>(1)</sup> Z racji symetrii  $q_s = 0$  dla  $\alpha = 0$ ; licząc  $s$  od tego punktu obwodu mamy we wzorze (13.6a):  $T_z = P, J_y = \pi r^3 \delta, S_y^{(z)} = r^2 \delta \sin \alpha$ , skąd otrzymujemy wynik (a).



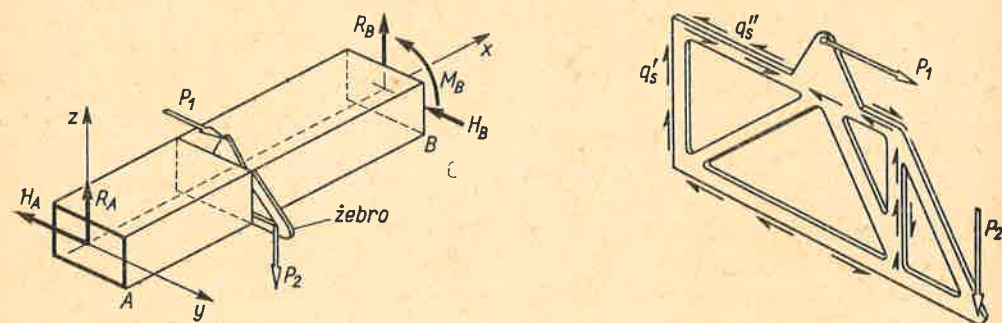
Ponieważ w rzeczywistości obciążenie  $P$  jest siłą skupioną, musimy więc wstawić element pośredniczący (żebro) zamieniający tę skupioną siłę na równoważny jej wydatek  $q_s$  rozłożony w sposób ciągły po obwodzie płaszcza. Zgodnie zatem z III zasadą dynamiki obciążenie pierścieniowego żebra jest takie, jak podaje rys. 13.29b. Wywołuje ono zginanie pierścienia w jego płaszczyźnie.



Rys. 13.29. Wprowadzenie obciążenia poprzecznego i statyka żebra

W podobny sposób postępujemy, gdy obciążenie układem sił  $P_1, P_2$  przyłożone jest w przekroju pośrednim (rys. 13.30). W przekroju tym występuje przeskok sił tnących  $T_y, T_z$  oraz momentu  $M_s$ , i towarzyszący temu przeskok  $\Delta q_s$  wydatków stycznych

$$\Delta q_s = q_s'' - q_s', \quad (b)$$



Rys. 13.30. Statyka żebra pośredniego

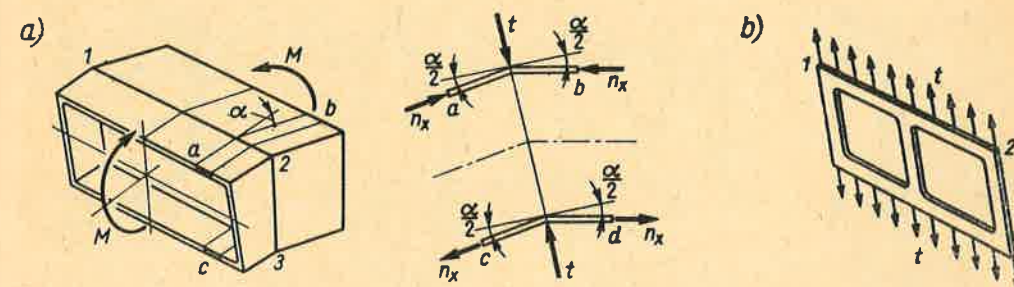
gdzie  $q_s'$  i  $q_s''$  obliczone są z odpowiednich wzorów art. 13.1÷13.4. Zrealizowanie tego przeskoku  $\Delta q_s$ , tzn. zamiana układu skupionych sił  $P_1, P_2$  na rozłożony w sposób ciągły przyrost  $\Delta q_s$ , wymaga dodatkowego elementu (żebra), którego statykę (rys. 13.30b) otrzymujemy bezpośrednio z układu oddziaływań.

Nie wchodząc w dalsze szczegóły<sup>(1)</sup> obliczenia wytrzymałości żebrowidzimy, że w celu prawidłowego wprowadzenia obciążenia poprzecznego w pręcie cienkościennym potrzeba zastosować dostatecznie mocne pojedyncze żebro.

<sup>(1)</sup> Są one zazwyczaj omawiane w wykładach statyki konstrukcji.

Innymi miejscami wymagającymi wzmocnienia są, nieuniknione w praktyce, załomy płaszcza (rys. 13.31a). Wywołane zginaniem takiego skrzynkowego pręta wydatki normalne  $n_x$  doznają raptownej zmiany kierunku w przekroju załomu 1, 2, 3. Aby zachować równowagę jednostkowego paska  $ab$ , należy w załomie dodać obciążenie ciągłe

$$t = 2n_x \sin(\alpha/2) \approx n_x \alpha \quad (c)$$



Rys. 13.31. Statyka żebra w załomie płaszcza

działające w płaszczyźnie załomu. Podobne, lecz przeciwne, obciążenie należy dodać dla dolnego paska  $cd$ . Obciążenia te można zrealizować przez wstawienie żebra w płaszczyźnie załomu (rys. 13.31b), dzięki czemu osiągamy prawidłową, niezakłóconą pracę płaszcza. Obciążenie żebra stanowią samorzównoważone oddziaływania  $t$  płaszcza o zwrotach przeciwnych niż na rys. 13.31a. Przy podanym tu ukształtowaniu żebra jako płaskiej ramy obciążenia te powodują zginanie poszczególnych jego elementów.

Powyższą uproszczoną analizę można uogólnić dla prętów o innym przekroju niż skrzynkowy. Jeśli mianowicie przekrój pręta z obydwóch stron załomu jest taki sam<sup>(1)</sup>, a obciążenie działa w płaszczyźnie osi pręta, to można dowiedzieć, że wstawienie pojedynczego żebra w załomie zapewnia prawidłową pracę ustroju. Gdy chociaż jeden z tych warunków nie jest spełniony, pojedynczo żebro nie wystarcza, a praca pręta zależy od ukształtowania elementów sąsiadujących z załomem. Jednym ze sposobów opanowania załomu jest wstawienie dodatkowego żebra w jednym z odcinków pręta.

Zagadnieniem podobnym do analizy załomu jest przypadek zakrzywionego pręta cienkościennego. Różnica polega na tym, że zmiana kierunku tworzących zachodzi tu w sposób ciągły i w plasterku pręta o długości  $\overline{cd} = 1$  wynosi  $\alpha_1 = 1/R$ . Wynikające stąd obciążenie  $t = n_x \alpha_1 = n_x/R$ , wobec braku żebrow, powoduje zginanie paska 1,2 jako poprzecznej beleczki utwierdzonej w pionowych ściankach 2,3 i 1,4. Podobnie zachowuje się dolny pasek 3,4, z tym że jego obciążenie ma zwrot przeciwny niż paska 1,2. W rezultacie poprzeczny przekrój pręta ulega deformacji (rys. 13.32b), przy której boki 1,2 i 3,4 wypuklają się na zewnątrz, a związane z nimi pionowe boki ulegają zakłębieniu do środka. Ta deformacja odbija się na rozkładzie naprężeń normalnych. Zauważmy bowiem, że działaniu momentu  $M$ , odpowiada tu nie tylko obrót przekrojów  $ac$  i  $bd$  o kąt  $\Delta\alpha$ , lecz i przesunięcie się badanego włókna  $ab$  o  $f_a$ , na skutek czego jego wydłużenie

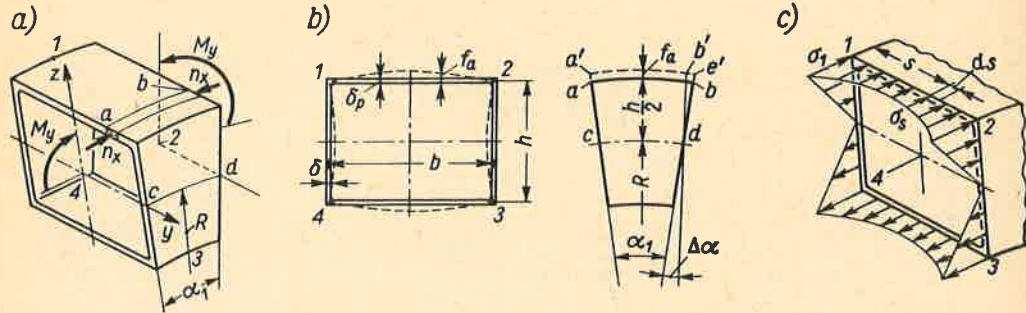
$$\varepsilon = (a'b' - ab)/ab = [(a'b' - a'e') + (a'e' - ab)]/ab.$$

<sup>(1)</sup> Płaszczyzna załomu zawiera wtedy dwusieczną kąta załomu  $\alpha$ .



Uwzględniając, że  $a'b' - a'e' = -[(h/2) + f_a] \Delta\alpha \approx -(h/2) \Delta\alpha$  oraz że  $a'e' - ab = f_a \alpha_1$ , zaś  $ab = [R + (h/2)] \alpha_1$ , mamy po przekształceniach

$$\varepsilon = -\frac{(h/2)}{R + (h/2)} \frac{\Delta\alpha}{\alpha_1} + \frac{f_a}{R + (h/2)} \quad (d)$$



Rys. 13.32. Wpływ zakrzywienia pręta na rozkład naprężeń normalnych w pręcie cienkościennym

Pierwszy składnik wyrażenia (d) jest identyczny jak w przypadku prętów o przekroju zwartym (art. 6.6). Składnik drugi wynikający z deformacji przekroju poprzecznego zmniejsza bezwzględną wartość  $\varepsilon$ , a więc i wartość naprężeń  $\sigma = E\varepsilon$ . Ta redukcja  $\sigma$  zależy od wielkości  $f_a$ , wobec czego rzeczywisty obraz  $\sigma$  jest, jak na rys. 13.32c. Widać, że odształcalność przekroju powoduje niepełne wykorzystanie materiału półki, gdyż przenoszona przez nią siła

$$N = \int_0^b \sigma_s \delta_p ds \quad (e)$$

jest mniejsza od siły  $\sigma_1 \delta_p b$ , którą mogłaby ona przenosić, gdyby nie odształcalność przekroju. Fakt ten ma taki sam wpływ na zachowanie się pręta, jak zmniejszenie jego momentu bezwładności  $J_y$ . W rachunkach uwzględniamy to przez wprowadzenie pojęcia efektywnej szerokości półki  $b_e < b$ . Odpowiadający jej moment

$$J_{ye} = (h^3 \delta / 6) + (b_e h^2 \delta_p / 2) \quad (f)$$

umożliwia obliczenie  $\sigma_1$  z wzoru (5.14) oraz określa sztywność  $EJ_{ye}$ , którą posługujemy się przy obliczaniu odształceń. Wartość stosunku  $b_e/b$  zależy (rys. 13.33) od dwóch parametrów

$$\eta = (h/b)(\delta_p/\delta)^3, \quad \psi = b^2/R\delta_p \quad (g)$$

charakteryzujących budowę pręta oraz jego zakrzywienie.

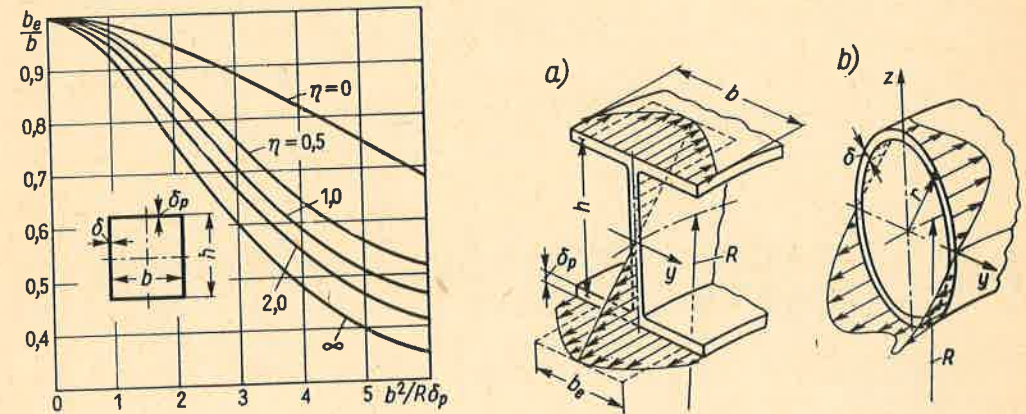
Podobne zjawisko obserwujemy i przy innych kształtach przekroju, jak w profilu dwuteowym (rys. 13.34a), dla którego efektywna szerokość półki  $b_e$  zależy od parametru  $\psi = b^2/R\delta_p$ ,

$$b_e = 1,52\sqrt{R\delta_p} [1 - (0,365/\psi)]. \quad (h)$$

Wzór powyższy słuszny jest, gdy  $\psi > 1$ . Gdy  $\psi < 1$ , wówczas  $b_e \approx b$ , czyli że zakrzywienie pręta nie odbija się na jego pracy.

Dla rury kołowej (rys. 13.34b) zakrzywienie osi, określone parametrem  $\psi_r = r^2/R\delta$ , zmniejsza jej sztywność do wartości  $kEJ_y = k(\pi Er^3 \delta)$ . Współczynnik  $k < 1$  jest przy tym

$$k = (12 + \psi_r^2)/(12 + 10\psi_r^2). \quad (i)$$



Rys. 13.33. Szerokość efektywna dla przekroju skrzynkowego

Rys. 13.34. Obrazy naprężeń w cienkościennych prętach zakrzywionych

Zakrzywienie to wpływa także na rozkład  $\sigma$ , a mianowicie

$$\sigma = \frac{M_y z}{kJ_y} \left(1 - \frac{\xi z^2}{r^2}\right), \quad \text{przy czym} \quad \xi = \frac{6\psi_r^2}{6 + 5\psi_r^2}. \quad (j)$$

Widać, że na skutek odształcalności przekroju naprężenia te nie są proporcjonalne do odległości  $z$  włókna od osi obojętnej. Ich maksymalna wartość pojawia się we włóknie, dla którego  $z = r/\sqrt{3\xi}$  i wynosi  $\sigma_{\max} = 2Mr/3\sqrt{3\xi} J_y k$ .



# Nieliniowe zagadnienia wytrzymałości materiałów

## 14 PRACA USTROJÓW SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH

### 14.1. Zasadnicze cechy pracy ustrojów sprężysto-plastycznych

We wszystkich badanych dotąd zagadnieniach zakładano sprężystość materiału, a więc słuszność prawa Hooke'a. W praktyce jednak mamy dużo przypadków, gdy część lub cały ustrój wykazuje trwałe (plastyczne) odkształcenia. Do zagadnień tych należą procesy obróbki plastycznej, jak tłoczenie lub obciąganie blach, zwijanie sprężyn itp. Zachodzące w takiej obróbce trwałe odkształcenia dają pożądany kształt elementu i na ogół nie pogarszają, a niekiedy poprawiają jego własności wytrzymałościowe. Inną kategorią zagadnień, w których występują trwałe odkształcenia, jest analiza obciążeń niszczących. Ich znajomość, jak wiemy z art. 1.9, daje bardziej prawidłową ocenę bezpieczeństwa niż metoda naprężeń dopuszczalnych, którą stosowaliśmy dotychczas.

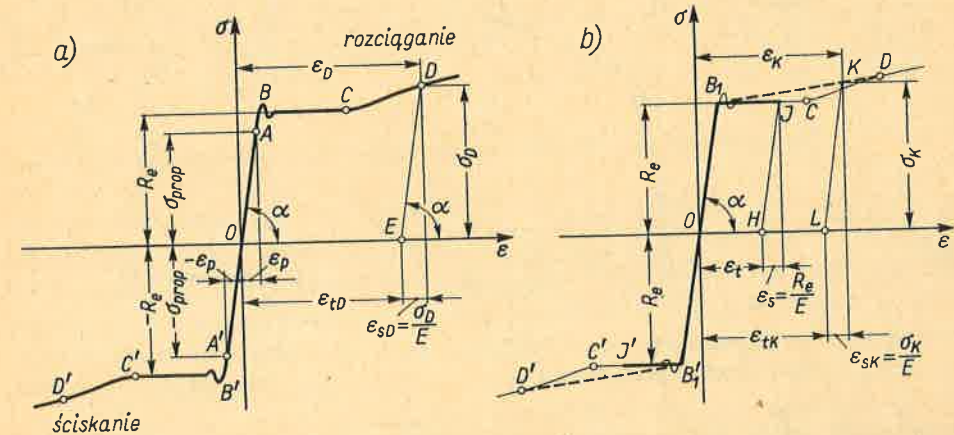
Rozszerzając zakres badania odkształceń poza granice proporcjonalności musimy znać własności materiału. Z reguły własności te opisujemy wykresem rozciągania-ściskania, jak pokazany na rys. 14.1a wykres<sup>(1)</sup>  $\sigma(\epsilon)$  dla stali niskowęglowych. Dla większości metali wykres ten jest symetryczny względem początku  $O$ , a jego punkty charakterystyczne, jak granice proporcjonalności ( $\sigma_{prop}$ ,  $\epsilon_p$ ), plastyczności  $R_e$ , mają przy rozciąganiu i ścisaniu równe wartości bezwzględne. Wykresy te odpowiadają, jak wiadomo, procesowi tzw. *prostego obciążenia*, w którym bezwzględna wartość  $\epsilon$  bez przerwy rośnie. Przy tzw. *procesie odwrotnym* (odciążeniu), gdy po osiągnięciu obranego punktu  $D$  wartość  $\sigma$  maleje, wykres  $\sigma(\epsilon)$  jest linią prostą  $DE$  równoległą do  $OA$ . Widać przy tym, że całkowite odkształcenie  $\epsilon_D$

<sup>(1)</sup> Na osi odciętych proporcje umyślnie są skażone. W rzeczywistości  $\epsilon_c \gg \epsilon_p$ , na przykład  $\epsilon_p = 1 \div 2\%$ ,  $\epsilon_c = 20 \div 30\%$ .

jest zawsze sumą odkształcenia trwałego  $\epsilon_{tD}$  dla stanu całkowitego odciążenia ( $\sigma = 0$ ) i odkształcenia sprężystego  $\epsilon_{sD} = \sigma_D/E$  odpowiadającego  $\sigma_D$ , czyli

$$\epsilon_D = \epsilon_{tD} + \epsilon_{sD}. \quad (a)$$

Bezpośrednie wykorzystanie wykresu  $\sigma(\epsilon)$  narzuca rozwiązanie zadań metodami wykreślnymi lub numerycznymi. W rozwiązaniach analitycznych zastępujemy rzeczywisty



Rys. 14.1. Rzeczywisty wykres i uproszczone wykresy rozciągania-ściskania materiałów z wyraźną granicą plastyczności

wykres  $\sigma(\epsilon)$  zależnościami uproszczonymi tak dobranymi, aby oddawały możliwie wiernie przebieg rzeczywisty. Jest rzeczą jasną, że ten dobór zależy od badanego przedziału  $\epsilon$ . I tak, gdy odkształcenie to jest w przedziale  $(-\epsilon_c, \epsilon_c)$ , wówczas wykres zastępujemy łamaną  $J'B_1OB_1J$  (rys. 14.1b), zakładając, że na odcinku  $B_1OB_1$  materiał jest sprężysty, a na poziomych odcinkach  $J'B_1$  i  $JB_1$  plastyczny. Wykres ten i opisujące go zależności

$$\sigma = E\epsilon, \quad \text{gdy } |\epsilon| \leq R_e/E, \quad \sigma = R_e = \text{const}, \quad \text{gdy } |\epsilon| \geq R_e/E, \quad (b)$$

określają stosowany bardzo często model *materiału idealnie plastycznego*. Gdy badany zakres  $\epsilon$  jest większy, np.  $(-\epsilon_D, +\epsilon_D)$ , wówczas wykres zastępujemy łamaną  $D'B_1OB_1D$ , określając tzw. *materiał plastyczny z umocnieniem*, w którym na odcinku  $B_1OB_1$  jest  $\sigma = E\epsilon$ , a na prostej  $B_1D$

$$\sigma = R_e + E_u[\epsilon - (R_e/E)], \quad \text{gdy } \epsilon > R_e/E, \quad (c)$$

gdzie  $E_u$  — *moduł umocnienia* jest współczynnikiem kierunkowym prostej  $B_1D$  dopasowanym do przedziału badanych odkształceń.

Ten sam model materiału z umocnieniem stosujemy, gdy nie ma wyraźnej granicy plastyczności (rys. 14.2). Niekiedy zamiast tego stosujemy zależność analityczną opisującą cały wykres  $\sigma(\epsilon)$ . Przy rozciąganiu na przykład stopów aluminiowych taką zależnością jest

$$\epsilon = (\sigma/E) + \epsilon_{\max} e^{-m[1 - (\sigma/R_m)^2]}, \quad (d)$$

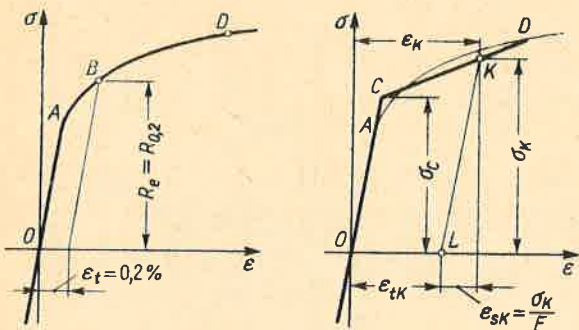
gdzie  $\epsilon_{\max}$  — trwałe odkształcenie odpowiadające  $R_m$ , tj. doraźnej wytrzymałości materiału



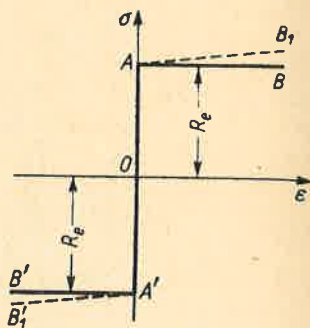
na rozciąganie, a  $m$  parametrem charakterystycznym dla danego materiału. Jeśli przyjąć, że dla większości aluminiowych stopów konstrukcyjnych  $\epsilon_{\max} \approx 0,14$ , to

$$m = 4,25/[1 - (R_{0,2}/R_m)], \quad (e)$$

gdzie  $R_{0,2}$  — umowna granica plastyczności odpowiadająca  $\epsilon_t = 0,2\%$ .



Rys. 14.2. Rzeczywisty i uproszczony wykres  $\sigma(\epsilon)$  materiału bez wyraźnej granicy plastyczności



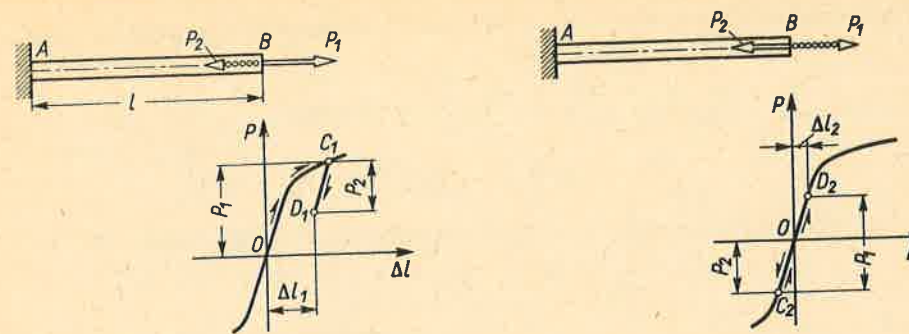
Rys. 14.3. Wykres  $\sigma(\epsilon)$  materiału sztywno-plastycznego

Przy badaniu jeszcze większych odkształceń pomijamy sprężystość materiału przyjmując wykres  $\sigma(\epsilon)$ , jak na rys. 14.3. W zakresie naprężeń  $|\sigma| < R_e$  materiał jest idealnie sztywny, przy większych  $|\sigma|$  ma on tylko odkształcenia plastyczne. Materiał taki nazywamy *sztywno-plastycznym* z umocnieniem (linia  $B_1A'AB_1$ ) lub bez (linia  $B'A'AB$ ).

We wszystkich przypadkach zasadniczym kryterium doboru funkcji zastępującej wykres  $\sigma(\epsilon)$  jest dopasowanie się do jego rzeczywistego przebiegu. Drugim kryterium jest prostota rachunków. Jeśli okaże się, że przy danej funkcji rachunki te stają się zbyt złożone, to wybieramy inną funkcję tak, aby z jednej strony nie stracić dokładności odwzorowania rzeczywistego przebiegu  $\sigma(\epsilon)$ , z drugiej zaś aby obliczenia stały się prostsze.

W większości przypadków dotyczących maszyn odkształcenia trwałe, aczkolwiek znacznie większe od sprężystych, są niewielkie<sup>(1)</sup> (rzędu paru procent). W takich *zagadnieniach sprężysto-plastycznych* można z techniczną dokładnością stosować regułę wymiarów początkowych. Innymi słowami, przy układaniu równań równowagi można przyjąć jak w układach sprężystych, że urządzenie ma postać nieodkształconą. W odróżnieniu od tego przy badaniu stanów sprężysto-plastycznych zasada superpozycji na ogół nie obowiązuje. Widać to choćby na przykładzie rozciąganego pręta (rys. 14.4), w którym z dwóch kolejno obciążających go sił  $P_1$  i  $P_2$  siła  $P_1$  jest tak duża, że może wywołać odkształcenia trwałe. Przy kolejności obciążenia  $P_1, P_2$  otrzymujemy wydłużenie  $\Delta l_1$  inne niż  $\Delta l_2$  odpowiadające kolejności  $P_2, P_1$ . Widać też, że przy całkowitym odciążeniu mamy w pierwszym przypadku trwałe odkształcenie pręta, podczas gdy w drugim pręt zostaje sprężysty. Nazywając ogólnie *historią obciążenia* kolejność działania sił  $P_1, P_2$ , powiemy, że stan ustroju sprężysto-plastycznego zależy od historii obciążenia.

<sup>(1)</sup> Pomijamy tu takie zagadnienia jak kucie, wyciskanie itp.

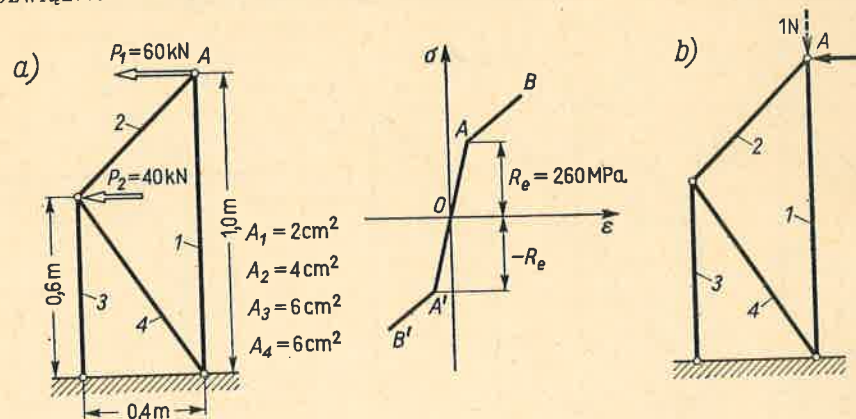


Rys. 14.4. Zależność odkształcenia końcowego od procesu obciążania

Przemieszczenia w ustrojach sprężysto-plastycznych określamy metodą prac przygotowanych (art. 9.3). Jej sens, jak pamiętamy, jest analitycznym ujęciem metody czysto geometrycznej, w której przyczyny powstania odkształceń nie są istotne. Jeśli więc badany urządzenie (rys. 9.20a) pracuje w stanie sprężysto-plastycznym, to fakt ten odbije się w odkształceniach  $du, dw_T, d\theta$  elementu  $ds$ , gdyż będą one inne niż wyrażone przez wzory (c)÷(e) art. 9.3. Podstawowa natomiast zależność (9.1) zostanie bez zmiany. Ta sama uwaga dotyczy pozostałych rozważań i uogólnień podanych w art. 9.4. Znajomość tych przemieszczeń jest niezbędna do oceny przydatności ustroju sprężysto-plastycznego. W takim bowiem ustroju traci sens stosowana dotąd ocena metodą naprężeń dopuszczalnych, a o użyteczności konstrukcji sędzi się według wartości przemieszczeń lub wartości obciążenia niszczącego.

**Zadania**

1. Wyznaczyć poziome i pionowe przesunięcie węzła  $A$  kratownicy (rys. 14.5a) z duralu, dla którego wykres  $\sigma(\epsilon)$  podano na rysunku 14.5, przy czym  $E = 7 \cdot 10^4$  MPa,  $E_u = 1,4 \cdot 10^4$  MPa. Rozwiązanie. Rachunki ujmujemy w podanej poniżej tabelcy. Po wyznaczeniu sił wzdłużnych  $N_i$



Rys. 14.5. Określenie przemieszczeń w kratownicy sprężysto-plastycznej



w prętach (kolumna 4) i naprężeń  $\sigma_i = N_i/A_i$  (kolumna 5) określamy stan pracy każdego pręta (kolumna 6) i stosownie do tego obliczamy  $\epsilon_i$ , np.

$$\text{pręt 1: } \epsilon_1 = \frac{R_e}{E} + \frac{\sigma_1 - R_e}{E_u} = \frac{260}{7 \cdot 10^4} + \frac{300 - 260}{1,4 \cdot 10^4} = 6,58 \cdot 10^{-3},$$

$$\text{pręt 3: } \epsilon_3 = -\frac{R_e}{E} - \frac{\sigma_3 - R_e}{E_u} = -\frac{260}{7 \cdot 10^4} - \frac{350 - 260}{1,4 \cdot 10^4} = -10,14 \cdot 10^{-3}.$$

Z wartości  $\epsilon_i$  (kolumna 7) wyznaczamy wydłużenia  $\Delta l_i$  prętów, np. w pręcie 4 mamy

$$\Delta l_4 = \epsilon_4 l_4 = 6,58 \cdot 10^{-3} \cdot 720 \text{ mm} = 4,75 \text{ mm}.$$

Pręt	$l_i$ m	$A_i$ cm <sup>2</sup>	$N_i$ kN	$\sigma$ MPa	Stan	$\epsilon_i$ ‰	$\Delta l_i$ mm	$n'_i$ N/N	$n'_i \Delta l_i$ mm	$n''_i$ N/N	$n''_i \Delta l_i$ mm
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,00	2,0	60	300	plast.	6,58	6,58	1,00	6,58	-1,00	-6,58
2	0,57	4,0	-85	-212	spręż.	-3,03	-1,73	-1,41	2,45	0	0
3	0,60	6,0	-210	-350	plast.	-10,14	-6,09	-2,50	15,24	0	0
4	0,72	6,0	180	300	plast.	6,58	4,75	1,80	8,54	0	0

$$\Sigma = 32,8 \text{ mm}$$

Znając  $\Delta l_i$  (kolumna 8) resztę zadania rozwiązujemy, jak podano w art. 9.3 (patrz także zadania 4 tegoż art. 9.3), a więc obciążamy ustrój w węzle A poziomą siłą 1 N (rys. 14.5b), określamy siły  $n'_i$  (N/N) (kolumna 9) oraz iloczyn  $n'_i \Delta l_i$  (kolumna 10), których algebraiczna suma

$$f_1 = \sum n'_i \Delta l_i = 32,8 \text{ mm}$$

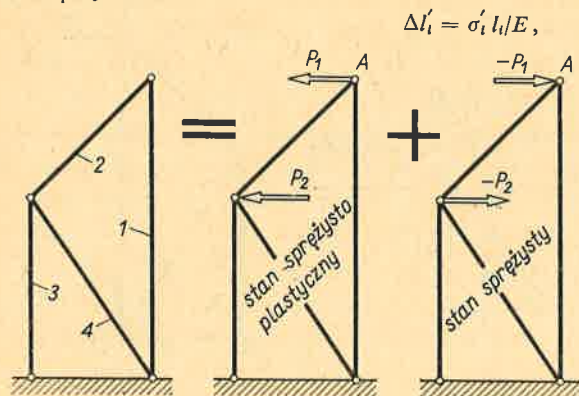
jest szukanym przesunięciem poziomym. Podobnie przykładając pionową siłę 1 N określamy pionowe przesunięcie

$$f_2 = \sum n''_i \Delta l_i = -6,6 \text{ mm}.$$

Uwzględniając zwroty sił jednostkowych i znaki  $f_1$  oraz  $f_2$  widzimy, że przesunięcie węzła A jest na lewo i do góry.

2. Jakie jest trwałe poziome przesunięcie węzła A kratownicy z zadania 1?

Rozwiązanie. Końcowy stan kratownicy (rys. 14.6) odpowiada działaniu na ustrój, obciążony jak w zadaniu 1, obciążenia odwrotnego, przy którym zachowuje się on sprężysto, a odkształcenia prętów  $\Delta l'_i$  są



Rys. 14.6. Stan końcowy kratownicy po obciążeniu i odciążeniu

pręt	$\Delta l'_i$ mm	$n'_i$ N/N	$n'_i \Delta l'_i$ mm
1	-4,28	1,00	-4,28
2	1,80	-1,41	-2,54
3	3,00	-2,50	-7,50
4	-3,10	1,80	-5,48

$$\Sigma = -19,8 \text{ mm}$$

przy czym wartości  $\sigma'_i$  są przeciwne do  $\sigma_i$  z zadania 1. Dla przykładu wydłużenie  $\Delta l'_3$  pręta 3 jest teraz

$$\Delta l'_3 = 350 \cdot 600 / 7 \cdot 10^4 = 3,00 \text{ mm}.$$

Całość rachunków ujmujemy w tabelę, w której wartości  $n'_i$  są jak poprzednio, a przesunięcie węzła A przy odwrotnym obciążeniu

$$\sum n'_i \Delta l'_i = -19,8 \text{ mm}.$$

Przeszczenie trwałe węzła A jest algebraiczną sumą przemieszczeń przy prostym i odwrotnym obciążeniu, a jego wartość

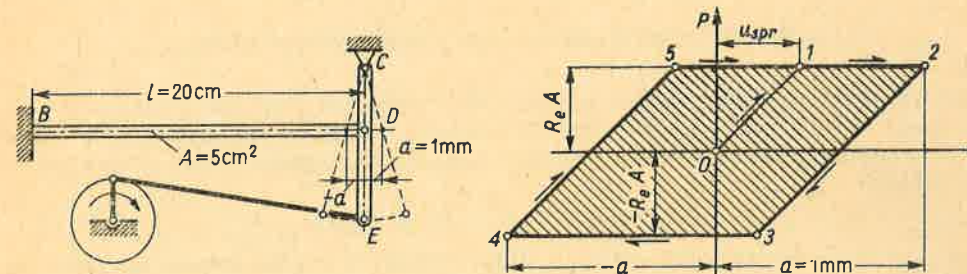
$$f_{\text{trwale}} = 32,8 - 19,8 = 13,0 \text{ mm}$$

wskazuje, że węzeł A jest przesunięty na lewo.

3. Po odciążeniu kratownicy (rys. 14.5) obciążono ją powtórnie siłami  $P'_1 = 0,9P_1$  i  $P'_2 = 0,9P_2$ . Przyjmując stan odciążony jako wyjściowy, określić poziome przesunięcie węzła A odpowiadające temu powtórnemu obciążeniu.

Odp. Ponieważ  $P'_1$  i  $P'_2$  są mniejsze niż  $P_1$  i  $P_2$ , zatem odkształcenie ustroju jest sprężyste, a szukane przesunięcie jest  $0,9 \cdot 19,8 = 17,8 \text{ mm}$ , tj. 0,9 wartości z zadania 2.

4. Pryzmatyczny pręt BD wykonano z idealnie plastycznego materiału ( $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $R_e = 400 \text{ MPa}$ ). Stosując mechanizm korbowy i dźwignię CDE wymuszamy cykliczny ruch końca D o amplitudzie  $a = 1 \text{ mm}$  (rys. 14.7). Zakładając dla prostoty, że kolejne cykle nie zmieniają własności materiału, obliczyć energię pochłoniętą przez pręt w każdym cyklu.



Rys. 14.7. Cykliczne wymuszone odkształcenie sprężysto-plastyczne

Rozwiązanie. Oznaczając przez  $u$  przesunięcie punktu D, a  $P$  siłę, otrzymujemy w układzie współrzędnych  $(P, u)$  obraz jednego cyklu w postaci równoległoboku 2, 3, 4, 5. Linia 0,1 odpowiada sprężystemu rozciąganiu dziewiczego materiału, linia 1,2 – pierwszemu plastycznemu odkształceniu, linia 2,3 równoległa do 0,1, obciążeniu od  $u = +a$  aż do chwili, gdy  $P = -R_e A$ , czyli gdy następuje płynięcie wywołane ściskaniem aż do punktu 4, gdy  $u = -a$ . Przy ruchu na prawo od  $u = -a$  do  $u = +a$  materiał odkształca się naprzód sprężysto aż do punktu 5, w którym  $P = R_e A$ , a następnie płynie aż do punktu 2, gdy  $u = +a$ , po czym sytuacje się powtarzają. Energia nieodwracalnie pochłonięta jest równa polu równoległoboku, czyli

$$L = P \cdot 2(a - u_{\text{spr}}) = 2R_e A(a - u_{\text{spr}}),$$

gdzie  $u_{\text{spr}} = R_e l / E = 0,4 \text{ mm}$  – sprężyste odkształcenie pręta. Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy  $L = 240 \text{ N m} = 240 \text{ J}$ .

5. Złączone ze sobą w przekroju B tuleja i współśrodkowy z nią walek wykonane z materiału idealnie plastycznego ( $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $R_e = 250 \text{ MPa}$ ) obciążamy siłą  $P$  (rys. 14.8a). Zbadać poszczególne fazy pracy konstrukcji przy wzroście siły  $P$ . Określić przemieszczenia  $u_B$  punktu B przy obciążeniu siłą  $P = 225 \text{ kN}$  i po odciążeniu.

Rozwiązanie. Ustrój jest statycznie niewyznaczalny. Jako zmienną niezależną weźmiemy  $u_B$ .

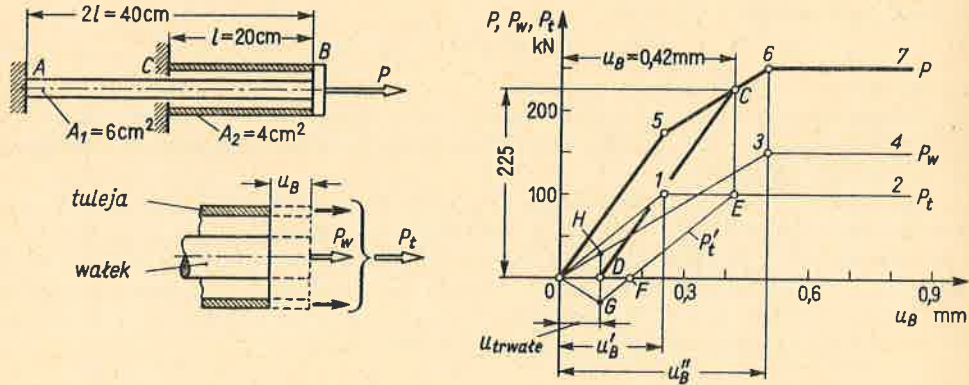


Rozdzielając w punkcie *B* tuleję od wałka wykreślamy przebieg siły  $P_t(u_B)$  w tulei i siły  $P_w(u_B)$  w wałku. Punkt *I* o współrzędnych

$$P_t = R_e A_2 = 100 \text{ kN}, \quad u'_B = R_e l/E = 0,25 \text{ mm}$$

odpowiada osiągnięciu stanu plastycznego w tulei, a punkt *3*

$$P_w = R_e A_1 = 150 \text{ kN}, \quad u''_B = R_e(2l)/E = 0,50 \text{ mm}$$



Rys. 14.8. Rozwiązanie statycznie niewyznaczalnego ustroju

osiągnięciu stanu plastycznego w wałku. Całkowita siła działająca na złącze tulei i wałka jest  $P = P_t + P_w$ , a jej wykres 0, 5, 6, 7 jest sumą rzędnych wykresów 0, 1, 2 i 0, 3, 4. Gdy  $u_B \leq u'_B$ , a  $P < 175 \text{ kN}$ , wówczas urządzenie jest sprężyste  $P_t = u_B A_2 E/l$ ,  $P_w = u_B A_1 E/2l$  i z równania  $P = P_t + P_w$  otrzymujemy  $u_B$ , a następnie

$$\sigma_t = 2\sigma_w = Eu_B/l = 2P/(2A_2 + A_1).$$

Gdy  $u'_B < u < u''_B$ , wówczas tuleja pracuje w stanie plastycznym, a wałek w stanie sprężystym, przy czym  $175 \text{ kN} < P < 250 \text{ kN}$ . Wreszcie, gdy  $u > u''_B$ , tuleja i wałek płyną, przy czym siła

$$P = P_{gran} = R_e(A_2 + A_1) = 250 \text{ kN} = \text{const.}$$

Z wykresu  $P(u_B)$  bądź analitycznie określamy  $u_B \approx 0,42 \text{ mm}$  dla  $P = 225 \text{ kN}$ . Przy zdjęciu tego obciążenia wykres  $P(u_B)$  jest linia  $CD$  równoległa do  $0,5$ . Odcinek  $\overline{OD} = 0,096 \text{ mm} \approx 0,10 \text{ mm}$  przedstawia odkształcenie trwałe dla  $P = 0$ . Tenże wynik otrzymamy analizując spadek siły  $P_w$  w sprężystym wałku (linia 0,3) i siły  $P'_t$  w plastycznie odkształconej tulei (linia  $EF \parallel 0,1$ ). Gdy  $u_B = \overline{OF}$ , wówczas siła  $P'_t = 0$ , natomiast wałek jest jeszcze rozciągany ( $P_w \neq 0$ ). Przy dalszym zmniejszaniu  $u_B$  w tulei pojawia się ścisnienie (linia  $FG$  i  $P'_t < 0$ ). Przy całkowitym odciążeniu ( $P = 0$ ) rozciągająca siła  $P_w = \overline{DH}$  musi równoważyć ścisnąjącą siłę  $P'_t = \overline{DG}$ . Punkt *G* otrzymujemy z przecięcia  $EF$  z odwróconym wykresem  $P_w$ .

6. Dwa cienkie, złożone bez wcisku pierścienie stalowe o jednakowej szerokości wykonane z materiałów idealnie plastycznych obciążono ciśnieniem  $p$  (rys. 14.9). Zbadaj ich pracę przy wzroście  $p$ , jeśli dla wewnętrznego pierścienia  $R'_e = 230 \text{ MPa}$ , dla zewnętrznego  $R''_e = 400 \text{ MPa}$ , a  $E' = E'' = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .

Rozwiązanie. Zmienną niezależną jest przyrost  $u$  promienia  $r$  i wtedy odkształcenie względne  $\epsilon' = \epsilon'' = u/r$ . W zakresie sprężystym  $\sigma' = \sigma'' = E'\epsilon = E'u/r$ , a ciśnienie

$$p = (\sigma'\delta' + \sigma''\delta'')/r = E'(\delta' + \delta'')u/r.$$

Sprężysta faza pracy kończy się z chwilą, gdy  $\sigma = R'_e$  i gdy

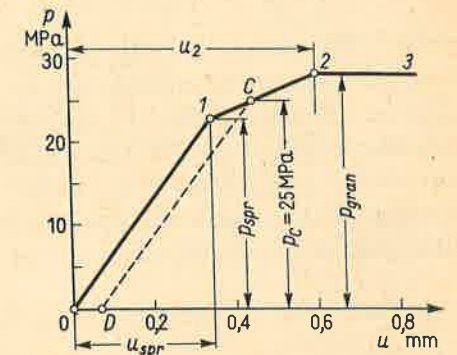
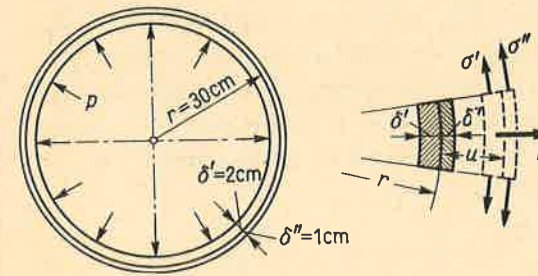
$$p = p_{spr} = R'_e(\delta' + \delta'')/r = 23 \text{ MPa}, \quad u_{spr} = R'_e r/E' = 0,345 \text{ mm}.$$

Gdy  $p > p_{spr}$ , pierścień wewnętrzny staje się plastyczny ( $\sigma' = R'_e = \text{const}$ ), natomiast w zewnętrznym jest nadal  $\sigma'' = E''u/r$ , skąd

$$p = (\sigma'\delta'/r) + (\sigma''\delta''/r) = (R'_e\delta'/r) + (E''u\delta''/r^2),$$

a więc  $p$  rośnie wraz z  $u$ , przy czym  $u > u_{spr}$ . Ta faza trwa, dopóki  $\sigma'' < R''_e$ . Gdy  $\sigma'' = R''_e$ , czyli gdy

$$p = p_{gran} = (R'_e\delta' + R''_e\delta'')/r = 28,7 \text{ MPa}, \quad u_2 = R''_e r/E'' = 0,600 \text{ mm},$$



Rys. 14.9. Praca zespołu pierścieni w stanie sprężysto-plastycznym

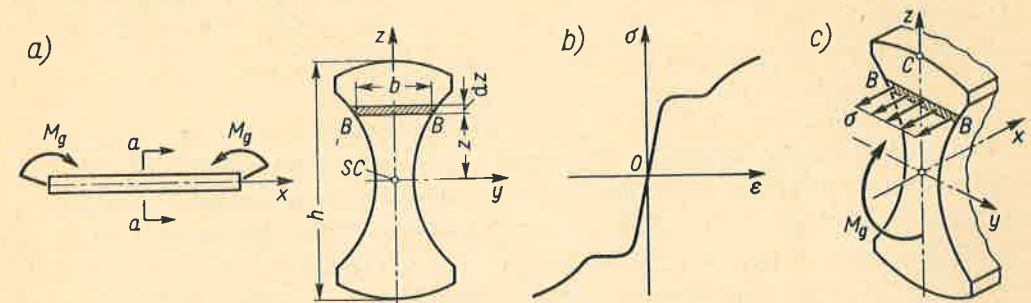
wówczas pierścień zewnętrzny przechodzi w stan plastyczny i przy dalszym wzroście  $u$  jest  $p = p_{gran} = \text{const}$ . Cały przebieg  $p(u)$  podaje wykres 0, 1, 2, 3.

7. Zespół pierścieni z zadania 6 obciążono ciśnieniem  $p_c = 25 \text{ MPa}$ . Jakie naprężenia  $\sigma'$  i  $\sigma''$  zostaną po odciążeniu?

Odp. Z wykresu (rys. 14.9) lub analitycznie  $u_{trwale} = \overline{OD} = 0,060 \text{ mm}$ , skąd  $\sigma'' = E''u_{trwale}/r = 40 \text{ MPa}$ , a  $\sigma' = -\sigma''\delta''/\delta' = -20 \text{ MPa}$ ,

### 14.2. Zginanie belki sprężysto-plastycznej

Zacniemy od analizy czystego zginania (rys. 14.10a). Dla prostoty zakładamy, że przekrój belki ma dwie osie symetrii  $y, z$ , moment gnący  $M_g$  działa w płaszczyźnie  $xz$ , a wykres  $\sigma(\epsilon)$  jest symetryczny względem  $O$  (rys. 14.10b). Z racji symetrii warstwą obojętną



Rys. 14.10. Czyste zginanie sprężysto-plastyczne



jest oś  $y$ , a zgięcie zachodzi w płaszczyźnie  $xz$ . Wartość  $M_g$  jest przy tym większa od wartości  $M_{spr}$ , dla której we włóknach skrajnych osiągamy granicę sprężystości, tj.

$$M_{spr} = \sigma_{spr} W_y = 2\sigma_{spr} J_y/h. \quad (a)$$

Ponieważ przy czystym zginaniu przekroje zostają zawsze płaskie, niezależnie od tego, czy materiał jest sprężysty, czy nie (art. 5.5), zatem odkształcenie względne  $\epsilon$  we włóknach warstwy  $BB$  wyraża się wzorem (5.7), czyli

$$\epsilon = -z/\rho, \quad (b)$$

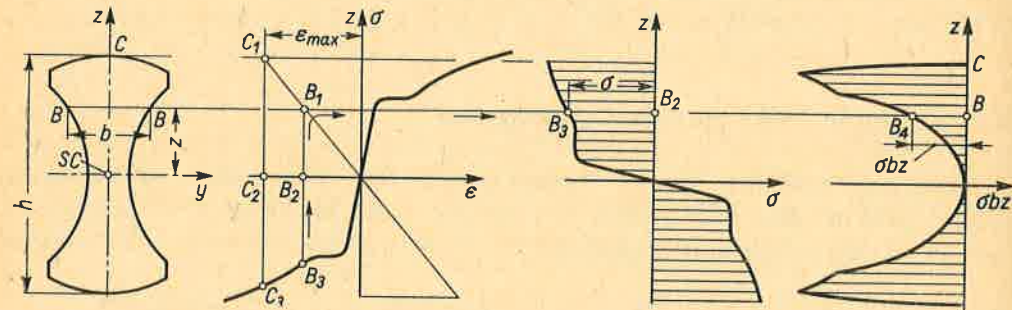
gdzie  $\rho$  — promień krzywizny warstwy obojętnej. Ponadto, jak w art. 5.5, pomijamy wzajemne poprzeczne naciski włókien wzdłużnych, wobec czego włókna te są w stanie prostego rozciągania lub ściskania. Naprężenia  $\sigma$  we włóknach badanej warstwy  $BB$  są jednakowe, a ich wartość wynika z wykresu  $\sigma(\epsilon)$  dla  $\epsilon$  określonego wzorem (b). Elementarna siła  $\sigma b dz$ , przenoszona przez włókna warstwy  $BB$  daje względem warstwy obojętnej moment  $\sigma b dz z$ . Suma tych elementarnych momentów jest równa momentowi  $M_g$ , jako wysiłkowi przekroju. Wynikająca stąd wartość

$$M_g = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma b z dz \quad (14.1)$$

zależy od krzywizny  $1/\rho$ . Funkcję tę, czyli  $M_g(1/\rho)$ , wyznaczamy metodą wykreślno-analityczną. W tym celu obieramy pewną wartość  $\epsilon_{max}$  w skrajnym włóknie  $C$ , dla której

$$1/\rho = 2\epsilon_{max}/h. \quad (c)$$

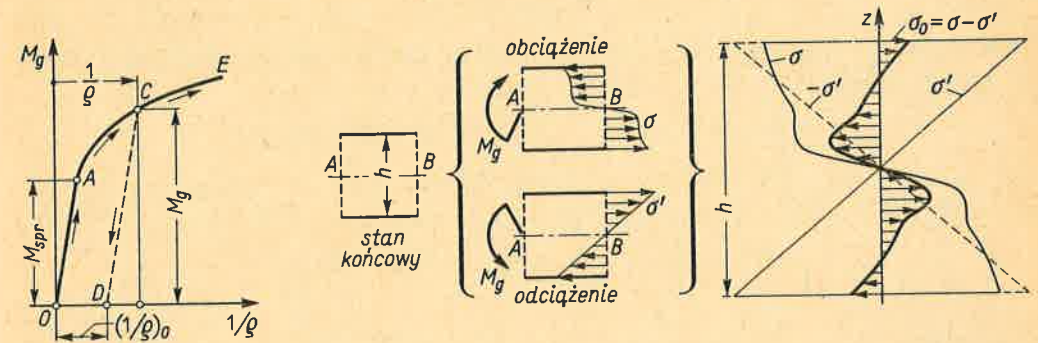
Łącząc teraz (rys. 14.11) obraz przekroju, rozkład  $\epsilon(z)$  oraz wykres  $\sigma(\epsilon)$  wyznaczamy dla badanej warstwy  $BB$  po kolei: odkształcenie  $\epsilon$  (punkt  $B_1$ ), wartość  $\sigma$  (rzędna  $B_2B_3$ ),



Rys. 14.11. Określenie wartości  $M_g$  dla danej krzywizny  $1/\rho = 2\epsilon_{max}/h$

którą „przerzucamy” na wykres  $\sigma(z)$ , i na koniec obliczamy iloczyn  $\sigma b z$ , biorąc odpowiednie  $b$  i  $z$  z obrazu przekroju. Tę wartość  $\sigma b z$  nanosimy w funkcji  $z$  jako odcinek  $B_4 B$ . Postępując podobnie dla innych wartości  $z$  otrzymujemy wykres  $\sigma b z$ , którego pole daje moment  $M_g$  odpowiadający obranej krzywiznie  $1/\rho$ . Wynik ten przedstawiamy na wykresie jako punkt  $C$  (rys. 14.12). Powtarzając taką operację dla innych  $\epsilon_{max}$  otrzymujemy krzywą  $OACE$  obrazującą przebieg  $M_g(1/\rho)$ . Wykres ten umożliwia określenie ugięć belki oraz trwałej krzywizny  $1/\rho_0$  po jej odciążeniu, gdyż wartość  $1/\rho_0 = \overline{OD}$ , tj. odcinkowi

wynikającemu z przecięcia  $CD \parallel OA$  z osią odciętych. Temu trwałemu zakrzywieniu odpowiadają tzw. resztkowe lub własne naprężenia  $\sigma_0$  (rys. 14.13) jako algebraiczna suma znanych już naprężeń  $\sigma$  przy obciążeniu  $M_g$  (rys. 14.12) i naprężeń  $\sigma'$  przy odciążeniu, gdy



Rys. 14.12. Wykres  $M_g(1/\rho)$

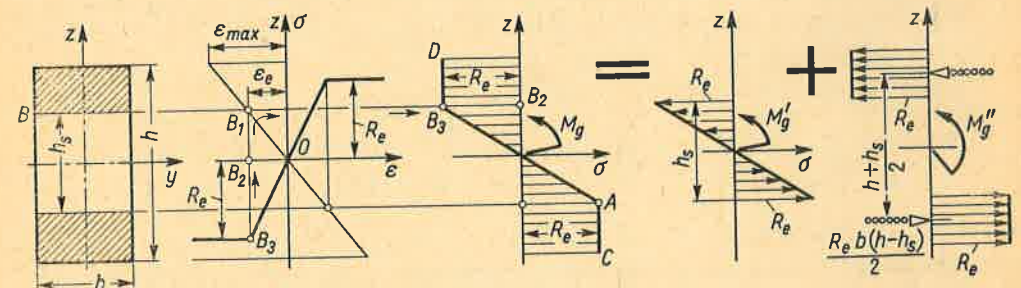
Rys. 14.13. Naprężenia własne przy zginaniu sprężysto-plastycznym

tenże moment  $M_g$  ma zwrot przeciwny. W tym drugim przypadku materiał zachowuje się sprężysto, a rozkład  $\sigma'(z)$ :

$$\sigma'(z) = M_g z/J, \quad (d)$$

jest liniowy. Określony z nałożenia wykresów  $\sigma$  i  $\sigma'$  rozkład  $\sigma_0(z)$  jest samozrównoważony, czyli że jego wypadkowa siła wzdłużna i moment gnący są równe zero.

Gdy materiał jest idealnie plastyczny, opisaną ogólną metodą wykreślno-analityczną można zastąpić metodami analitycznymi. Dla przykładu, w belce o przekroju prostokątnym przy obciążeniu powodującym uplastycznienie zewnętrznych zakreskowanych części przekroju (rys. 14.14) profil  $\sigma(z)$  jest linią łamaną, której odcinek  $AB_3$  odpowiada sprężystej



Rys. 14.14. Zginanie belki z materiału idealnie plastycznego

części przekroju, a odcinki  $AC$  i  $B_3D$  częściami uplastycznionymi. Moment gnący  $M_g$  jest równy sumie momentu  $M'_g = R_e b h_s^2/6$  belki sprężystej o wymiarach  $b \times h_s$  i momentu  $M''_g = R_e b (h-h_s)(h+h_s)/4$  odpowiadającego częściami uplastycznionym, w których  $\sigma = \pm R_e = \text{const}$ . W wyniku

$$M_g = M'_g + M''_g = \frac{R_e b h^2}{12} \left[ 3 - \left( \frac{h_s}{h} \right)^2 \right] = \frac{M_{spr}}{2} \left[ 3 - \left( \frac{h_s}{h} \right)^2 \right], \quad (e)$$



gdzie  $M_{spr} = R_e bh^2/6$  — moment gnący, przy którym maksymalne naprężenia są równe granicy sprężystości utożsamionej tu z  $R_e$ . Odpowiadającą momentowi  $M_g$  krzywiznę określamy z wzoru (b) wstawiając  $\varepsilon = \varepsilon_e = R_e/E$ ,  $z = h_s/2$ , skąd

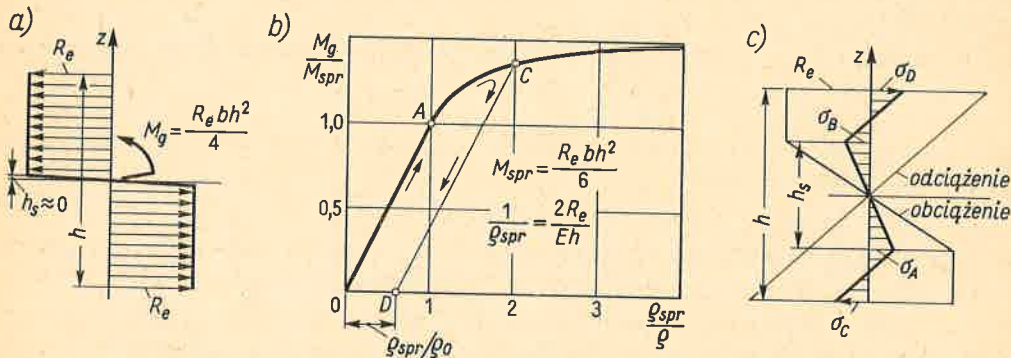
$$1/\varrho = 2\varepsilon_e/h_s = 2R_e/Eh_s. \quad (f)$$

Przedyskutujemy sens wyników (e) i (f) w funkcji  $h_s$ . Gdy  $h = h_s$ , czyli gdy cały przekrój jest jeszcze sprężysty, wówczas

$$M_g = M_{spr} = R_e bh^2/6, \quad (1/\varrho)_{spr} = 2R_e/Eh = M_{spr}/EJ_y. \quad (g)$$

Przy wzroście strefy uplastycznionej maleje  $h_s$ , natomiast  $M_g$  i  $1/\varrho$  rosną. Przy pełnym uplastycznieniu przekroju, gdy  $h_s \rightarrow 0$ , a  $\sigma(z)$  ma postać dwóch prostokątów (rys. 14.15a)

$$M_g \rightarrow 1,5M_{spr}, \quad 1/\varrho \rightarrow \infty, \quad \text{czyli} \quad \varrho \rightarrow 0.$$



Rys. 14.15. Dyskusja wyników analizy zginania belki o przekroju prostokątnym

Powyższa wartość  $M_g$  jest *wartością graniczną*, przy której, zgodnie z przyjętym modelem materiału, wyczerpana jest całkowicie nośność belki. Jednocześnie fakt, że  $\varrho = 0$ , wskazuje na niemożność zrealizowania tego stanu w rzeczywistości.

Rugując z (e) i (f) wymiar  $h_s$  otrzymujemy zależność

$$\frac{M_g}{M_{spr}} = \frac{1}{2} \left[ 3 - \left( \frac{\varrho}{\varrho_{spr}} \right)^2 \right] \quad \text{lub} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_{spr}} \left( 3 - 2 \frac{M_g}{M_{spr}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (h)$$

odniesioną do wielkości  $M_{spr}$  i  $\varrho_{spr}$  określonych wzorami (g). Jej przebieg (rys. 14.15b) wskazuje na szybszy w zakresie sprężysto-plastycznym ( $M_g > M_{spr}$ ) wzrost krzywizny niż wzrost  $M_g$ . Trwałą krzywiznę  $1/\varrho_0$  belki odpowiadającą, jak wiadomo, odcinkowi OD możemy tu określić analitycznie jako różnicę krzywizny  $1/\varrho$  danej wzorem (h) oraz krzywizny  $1/\varrho' = M_g/EJ_y$  odpowiadającej sprężystemu odciążeniu

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho_{spr}} \left( 3 - 2 \frac{M_g}{M_{spr}} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{M_g}{EJ_y}. \quad (i)$$

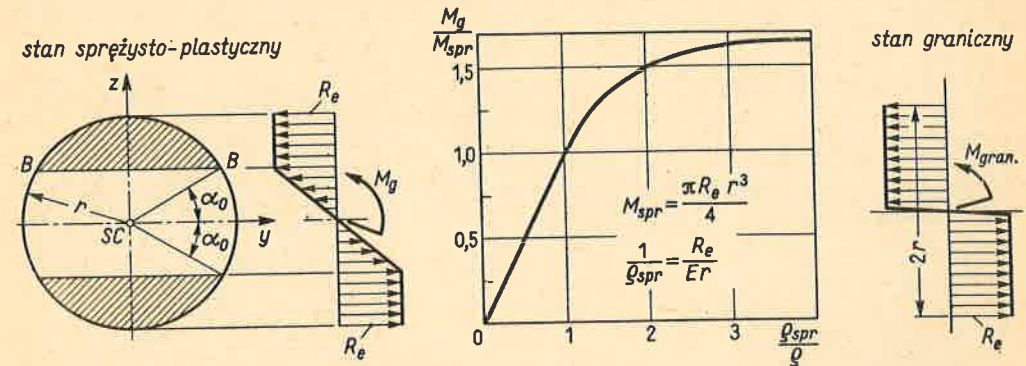
Jak wyjaśniono poprzednio, po odciążeniu belki panuje w niej samozrównoważony stan naprężeń resztkowych. W badanym tu przypadku ten stan ma postać jak na rys. 14.15c,

przy czym

$$\sigma_D = -\sigma_C = \frac{6M_g}{bh^2} - R_e, \quad \sigma_B = -\sigma_A = \frac{6M_g}{bh^2} \sqrt{3 - 2 \frac{M_g}{M_{spr}}} - R_e. \quad (j)$$

Podobnie obliczamy zależność  $M_g(1/\varrho)$  dla innych przekrojów. W przekroju na przykład kołowym (rys. 14.16) otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} M_g &= (R_e r^3/6) [3(\alpha_0/\sin \alpha_0) + 3 \cos \alpha_0 + 2 \cos^3 \alpha_0], \\ 1/\varrho &= R_e/Er \sin \alpha_0, \end{aligned} \right\} \quad (k)$$



Rys. 14.16. Sprężysto-plastyczne zginanie pręta kołowego

gdzie  $\alpha_0$  — kąt określający położenie warstwy  $BB$  rozdzielającej uplastycznioną i sprężystą część przekroju. Odpowiadający wynikom (k) wykres  $M_g(1/\varrho)$  ma asymptotę poziomą, gdy cały przekrój jest uplastyczniony ( $\alpha_0 \approx 0$ ) i gdy

$$M_g = M_{gran} = 4R_e r^3/3. \quad (l)$$

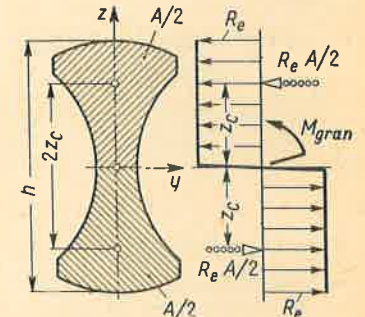
Powyższa wartość, przy której wyczerpana jest całkowita nośność belki, jest  $\sim 1,7$  razy większa niż moment  $M_{spr} = R_e W_y = \pi r^3 R_e/4$ , przy którym skrajne włókna osiągną po raz pierwszy wartość  $R_e$ .

W porównaniu z powyższymi rozważaniami znacznie prostsza jest analiza stanu granicznego, którego znajomość jest konieczna do oceny bezpieczeństwa. Ponieważ w dowolnym symetrycznym przekroju stan ten odpowiada dwuprostokątnemu rozkładowi  $\sigma(z)$  (rys. 14.17), zatem moment graniczny jest

$$M_{gran} = (R_e A/2) 2z_c = R_e A z_c, \quad (14.2)$$

gdzie  $z_c$  — odległość środka ciężkości pola  $A/2$ , czyli połowy całego przekroju od warstwy obojętnej (oś  $y$ ).

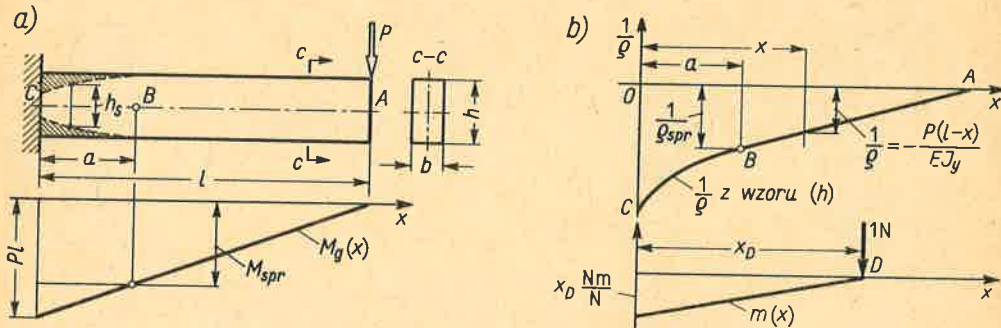
Ustalona tą czy inną metodą zależność  $M(1/\varrho)$  jest punktem wyjścia analizy *poprzecznego zginania* w zakresie sprężysto-plastycznym. Weźmy dla przykładu wykonaną z materiału idealnie plastycznego belkę wspornikową o przekroju prostokątnym (rys. 14.18a),



Rys. 14.17. Określenie  $M_{gran}$



w której obciążenie  $P$  jest takie, że  $M_{spr} < Pl < M_{gran}$ . Długość  $a$ , na której przekroje są częściowo uplastycznione, obejmuje część belki przy utwierdzeniu, gdzie  $M_g > M_{spr}$ . Pomijając wpływ naprężeń stycznych obliczamy rozkład  $\sigma(z)$  jak w przypadku czystego zginania (rys. 14.14). Wstawiając mianowicie do wzoru (e) wartość  $M_g$  dla szeregu przekrojów, określamy w każdym z nich wymiar  $h_s$  sprężystej części przekroju, a stąd otrzymujemy uplastyczniony obszar belki zakreskowany na rysunku. Jeśli maksymalny moment  $Pl$  zbliża się do wartości  $M_{gran}$ , to te uplastycznione obszary zbliżają się do warstwy obojętnej przekroju utwierdzonego. W przypadku gdy  $Pl = M_{gran}$ , mamy uplastycznienie tego przekroju (rys. 14.15a), przy czym  $h_s = 0$ ,  $\rho = 0$  i przekrój ten zachowuje się jak *plastyczny przegub* przenoszący moment  $M_{gran}$ .



Rys. 14.18. Analiza sprężysto-plastycznego zginania poprzecznego

Aby wyznaczyć ugięcia belki pracującej w stanie sprężysto-plastycznym, określamy najpierw jej krzywiznę  $1/\rho$  jako funkcję  $x$  (rys. 14.18b). W sprężystym odcinku  $BC$  badanej belki mamy oczywiście

$$1/\rho = M_g/EJ_y = -P(l-x)/EJ_y,$$

natomiast dla odcinka  $CB$  wykorzystujemy wzór (h) bądź wykres  $M_g(1/\rho)$  jak na rys. 14.15b. Po tej czynności postępujemy jak opisano w art. 9.3. I tak, chcąc obliczyć ugięcie  $f_D$  punktu  $D$  obciążamy belkę siłą 1 N („czujnikiem”), określamy odpowiadający jej moment  $m(x)$ , a następnie według wzoru (9.1) wyznaczamy

$$f_D = \int m d\vartheta = \int (m/\rho) dx, \quad (14.3)$$

gdyż odpowiadający krzywiznie  $1/\rho$  elementarny względny kąt obrotu  $d\vartheta = dx/\rho$ . Wskazane tu całkowanie przeprowadzamy wykreślnie.

Podobnie rozwiązujemy zagadnienia dla innych postaci przekrojów i innych materiałów niż idealnie plastyczne.

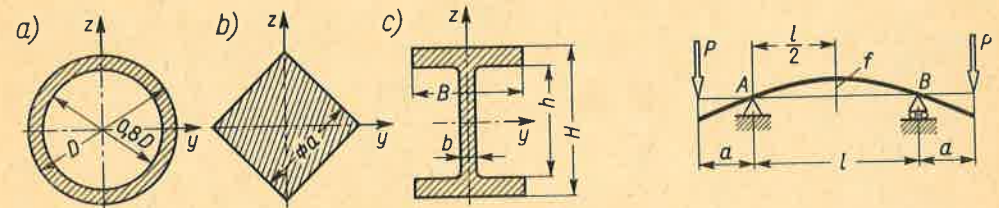
**Zadania**

1. Określić stosunek  $M_{gran}/M_{spr}$  dla belek o podanych przekrojach (rys. 14.19) wykonanych z materiału idealnie plastycznego.

Odp. a) 1,43; b) 2; c)  $3H [B(H^2 - h^2) + bh^2]/2 [B(H^3 - h^3) + bh^3]$ .

2. Określić strzałkę ugięcia  $f$  belki o przekroju prostokątnym z idealnie plastycznego materiału (rys. 14.20), gdy  $Pa = 1,375 \cdot M_{spr}$ . Określić trwałą strzałkę ugięcia  $f_0$  po odciążeniu belki.

Odp. Z wzoru (h)  $1/\rho = 2/\rho_{spr} = 2M_{spr}/EJ_y$ , zaś  $f = l^2/8\rho = M_{spr}l^2/4EJ_y$ . Z wzoru (i) trwałą krzywizną  $1/\rho_0$  przy  $M_g = 1,375M_{spr}$  jest  $1/\rho_0 = 0,625/\rho_{spr}$  i  $f_0 = l^2/8\rho_0 = M_{spr}l^2/12,8EJ_y$ .



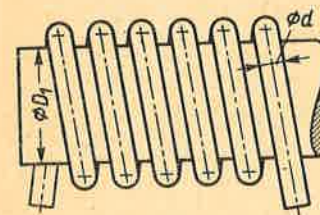
Rys. 14.19. Do zadania 1

Rys. 14.20. Do zadania 2

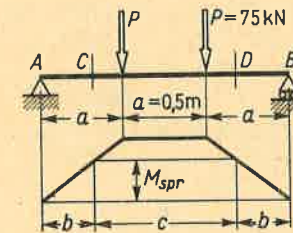
3. Ze stalowego drutu ( $E = 2 \cdot 10^5$  MPa,  $d = 8$  mm) mamy zwinąć na zimno sprężynę o średnicy nawinięcia  $D = 50$  mm. Zakładając, że materiał jest idealnie plastyczny ( $R_e = 1000$  MPa), i wykorzystując wykres  $M_g(1/\rho)$  z rys. 14.16 określić średnicę  $D_1$  wałka (rys. 14.21), na którym należy tę sprężynę zwinąć.

Rozwiązanie. Zakładając, że skok sprężyny jest mały, traktujemy każdy ze zwojów sprężyny jako płaski. Z warunków zadania mamy trwałą krzywiznę zwoju  $1/\rho_0 = 2/D = 40 \text{ m}^{-1}$ . Jest ona, jak we wzorze (i), równa różnicy krzywizny  $1/\rho$  w chwili nawijania i krzywizny  $1/\rho' = M_g/EJ_y$  przy zluźnieniu, czyli

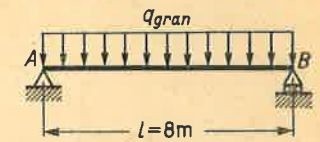
$$1/\rho_0 = (1/\rho) - (M_g/EJ_y).$$



Rys. 14.21.



Rys. 14.22.



Rys. 14.23.

Zauważmy, że przy podanych tu wymiarach  $M_g \approx M_{gran}$ , gdyż krzywizna odpowiadająca początkowi uplastycznienia  $1/\rho_{spr} = 2R_e/Ed = 1,25 \text{ m}^{-1}$  jest wielokrotnie mniejsza niż  $(1/\rho_0)$ , wobec czego

$$1/\rho \approx (1/\rho_0) + (M_{gran}/EJ_y) = (1/\rho_0) + (32R_e/3\pi Ed) = 42,1 \text{ m}^{-1},$$

gdzie  $M_{gran}$  wzięto z wzoru (l). Z powyższego obliczamy  $\rho = 23,7$  mm i średnicę wałka  $D_1 = 2\rho - d = 39,4$  mm.

4. Jakie są trwałe naprężenia w skrajnych włóknach drutu sprężyny z zadania 3.

Odp.  $\sigma \approx \pm [(M_{gran}/W_y) - R_e] \approx \pm 0,70R_e = \pm 700$  MPa, przy czym są one rozciągające po wewnętrznej stronie zwoju.

5. Określić, jaki odcinek  $CD$  wałka o średnicy  $d = 10$  cm (rys. 14.22) pracuje w stanie sprężysto-plastycznym, jeśli  $R_e = 225$  MPa?

Odp.  $M_{spr} = 25$  kNm, skąd  $b = M_{spr}/P = 0,33$  m,  $c = 0,83$  m.

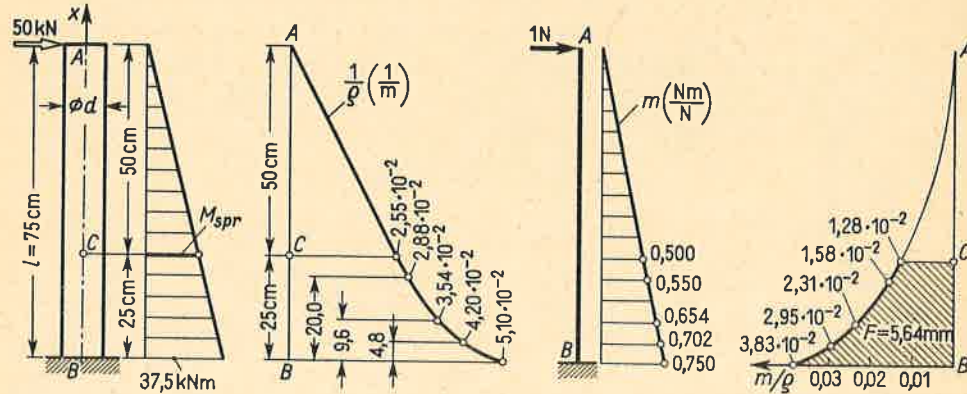
6. Określić wartość graniczną  $q_{gran}$  dla rury (rys. 14.23) z idealnie plastycznego materiału.  $R_e = 250$  MPa,  $D_z = 20$  cm,  $D_w = 16$  cm.

Odp. Wykorzystując wynik zadania 1 mamy  $q_{gran} l^2/8 = 1,43M_{spr}$  i przy  $M_{spr} = \pi R_e (D_z^4 - D_w^4)/32D_z$  jest  $q_{gran} = 14,5$  kN/m.



7. Określić trwałe ugięcie końca  $A$  wspornikowego wałka (rys. 14.24) z idealnie plastycznego materiału, jeśli  $R_e = 255 \text{ MPa}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $d = 10 \text{ cm}$ ,  $l = 75 \text{ cm}$ .

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od wykresu  $M_\theta$  i określenia uplastycznionego odcinka  $CB = 25 \text{ cm}$ , w którym  $M_\theta > M_{spr} = \pi d^3 R_e / 32 = 25 \text{ kNm}$ . Biorąc teraz, jak podano w tablicy, kolejno wartości



Rys. 14.24. Obliczenie ugięcia belki sprężysto-plastycznej

$\alpha_0$ (obrane)	$90^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$37,5^\circ$	$30^\circ$
$M_\theta$ kN m	25,0	27,5	32,7	35,2	37,5
$1/\rho$ $\text{m}^{-1}$	$2,55 \cdot 10^{-2}$	$2,88 \cdot 10^{-2}$	$3,54 \cdot 10^{-2}$	$4,20 \cdot 10^{-2}$	$5,10 \cdot 10^{-2}$
$x$ cm	25,0	20,0	9,6	4,8	0

kąta  $\alpha_0$  określające uplastyczniony obszar przekroju (rys. 14.16) wyznaczamy z wzorów (k) wartości momentu gnącego  $M_\theta$  oraz krzywiznę  $1/\rho$ , a z poprzedniego wykresu  $M_\theta(x)$  ustalamy odpowiednie odcięte  $x$ . Przykładowo, gdy  $\alpha_0 = 45^\circ$ , wówczas

$$M_\theta = \frac{255 \cdot 10^6 \cdot (0,05)^3}{6} \left[ 3 \frac{(\pi/4)}{(\sqrt{2}/2)} + 3 \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 \right] = 32,7 \cdot 10^3 \text{ N m}$$

oraz  $1/\rho = 255/2 \cdot 10^5 \cdot 0,05 \cdot 0,707 = 3,54 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$ , a z wykresu  $M_\theta(x)$  dla  $M_\theta = 32,7 \text{ kNm}$  mamy  $x = 9,6 \text{ cm}$ . W ten sposób budujemy wykres  $1/\rho$  w funkcji  $x$ . Po obciążeniu belki siłą  $1 \text{ N}$  („czujnikiem”) i wyznaczeniu  $m(x)$  obliczamy rzędne  $m/\rho$  w funkcji  $x$ . Otrzymany stąd wykres całkujemy liczbowo w przedziale  $BC$ , w wyniku czego mamy  $\int (m/\rho) dx = 5,64 \text{ mm}$ . Na odcinku  $AC$  całkę funkcji  $m/\rho$  obliczamy analitycznie, otrzymując według reguły Wierieszczagina

$$\int (m/\rho) dx = 2,55 \cdot 10^{-2} \cdot 0,50^2/3 = 2,12 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,12 \text{ mm}.$$

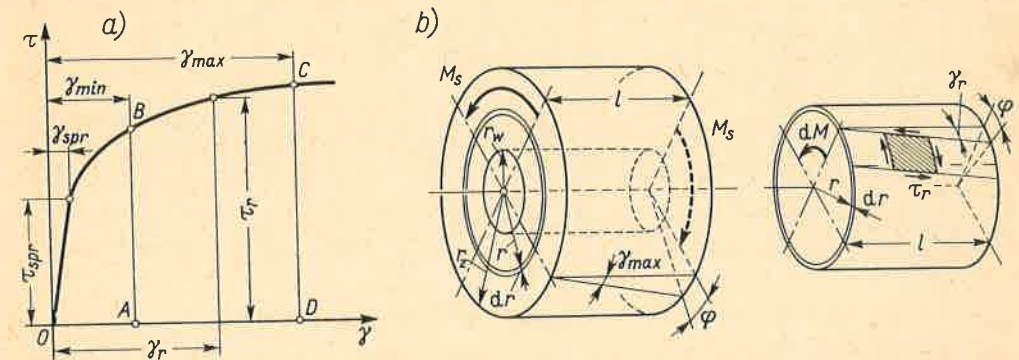
Całkowite ugięcie przy obciążeniu jest więc  $7,76 \text{ mm}$ . Przy odciążeniu belka zachowuje się sprężysto, a ugięcie

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ_y} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,75^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} (\pi \cdot 0,1^4/64)} = 7,16 \text{ mm}.$$

Poszukiwane ugięcie trwałe jest zatem  $0,60 \text{ mm}$ .

### 14.3. Sprężysto-plastyczne skręcanie wałka kołowego

Punktem wyjścia analizy jest wykres  $\tau(\gamma)$  wiążący w stanie czystego ścinania naprężenia styczne  $\tau$  i kąt odkształcenia postaciowego  $\gamma$ . Jak mówiono w art. 3.1, wykres ten (rys. 14.25a) można otrzymać doświadczalnie badając skręcanie cienkościennej rury (rys. 3.4).



Rys. 14.25. Skręcanie wałka w zakresie sprężysto-plastycznym

W analizie skręcania wałka (pełnego lub drążonego) zakładamy jak w zakresie sprężystym słuszność hipotezy płaskich przekrojów (art. 3.3), której wynikiem jest zależność

$$\gamma_r = \varphi r / l = \Theta r \quad (a)$$

wiążąca kąt  $\gamma_r$  odkształcenia postaciowego w elementarnej współśrodkowej rurze z kątem skręcenia  $\varphi$  lub względnym skręceniem  $\Theta = \varphi/l$ . Przenoszony przez tę rurę elementarny moment

$$dM = \tau_r 2\pi r^2 dr, \quad (b)$$

gdzie  $\tau_r$  — wartość naprężenia, jest rzędną wykresu  $\tau(\gamma)$  dla  $\gamma = \gamma_r$ . Suma tych momentów  $dM$  jest oczywiście równa momentowi skręcającemu  $M_s$ , skąd

$$M_s = \int_{r_w}^{r_z} dM = 2\pi \int_{r_w}^{r_z} \tau_r r^2 dr. \quad (c)$$

Aby uprościć obliczenia, wprowadzamy w powyższej zależności  $r = \gamma_r/\Theta$ ,  $dr = d\gamma_r/\Theta$ , a zamiast  $r_w$  i  $r_z$  wartości kątów odkształcenia  $\gamma_{min} = r_w \Theta$  i  $\gamma_{max} = r_z \Theta$  otrzymując w wyniku

$$M_s = \frac{2\pi}{\Theta^3} \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} \tau_r \gamma_r^2 d\gamma_r. \quad (14.4)$$

Występująca tu całka jest momentem bezwładności  $J_\tau$  względem osi  $\tau$  pola  $ABCD$  wykresu  $\tau(\gamma)$ . Zastępując rzeczywisty wykres  $\tau(\gamma)$  schodkowym (rys. 14.26a) obliczamy  $J_\tau$  jako

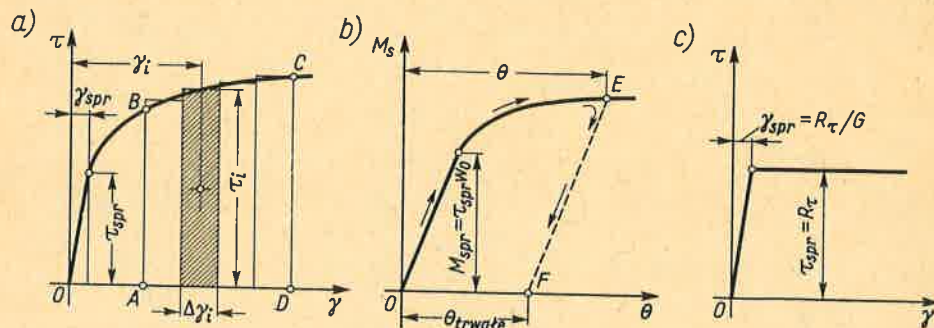
$$J_\tau \approx \sum \tau_i \gamma_i^2 \Delta\gamma_i \quad (d)$$



i wtedy zależność (14.4) przybiera postać

$$M_s = \frac{2\pi}{\Theta^3} J_\tau \quad (14.5)$$

Obierając kolejno szereg wartości  $\Theta$  wyznaczamy odpowiadające im wartości  $M_s$ , otrzymując w wyniku wykres  $M_s(\Theta)$  (rys. 14.26b). Warto zauważyć, że dla małych wartości  $\Theta$ ,



Rys. 14.26. Niektóre szczegóły i wyniki analizy skręcania

gdy materiał jest sprężysty i  $\tau = G\gamma$ , zależność (14.5) jest identyczna ze znanym już wzorem (3.12) albowiem

$$J_\tau = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} G\gamma^3 d\gamma = \frac{G}{4} (\gamma_{\max}^4 - \gamma_{\min}^4) = \frac{G\Theta^4}{4} (r_z^4 - r_w^4) = \frac{GJ_0 \Theta^4}{2\pi},$$

gdzie  $J_0$  — biegunowy moment bezwładności pola przekroju. Z zależności (3.12) korzystamy również, gdy  $\gamma$  tylko nieznacznie przekracza granicę sprężystości  $\gamma_{\text{spr}} = \tau_{\text{spr}}/G$ , gdyż w takim przypadku obliczenie  $J_\tau$  obarczone jest dużym błędem.

Pozostałe etapy analizy skręcania w zakresie sprężysto-plastycznym, jak określenie rozkładu  $\tau(r)$ , określenie trwałego skręcenia  $\Theta_{\text{trwale}}$  i naprężeń resztkowych  $\tau_0(r)$ , są wierną kopią etapów opisanych poprzednio w analizie zginania. Dla przykładu, wartość  $\Theta_{\text{trwale}}$  jest różnicą  $\Theta$  dla danego  $M_s$  i skręcenia  $\Theta' = M_s/GJ_0$  odpowiadającego odciążeniu, przy którym pręt zachowuje się sprężysto, czyli

$$\Theta_{\text{trwale}} = \Theta - (M_s/GJ_0). \quad (e)$$

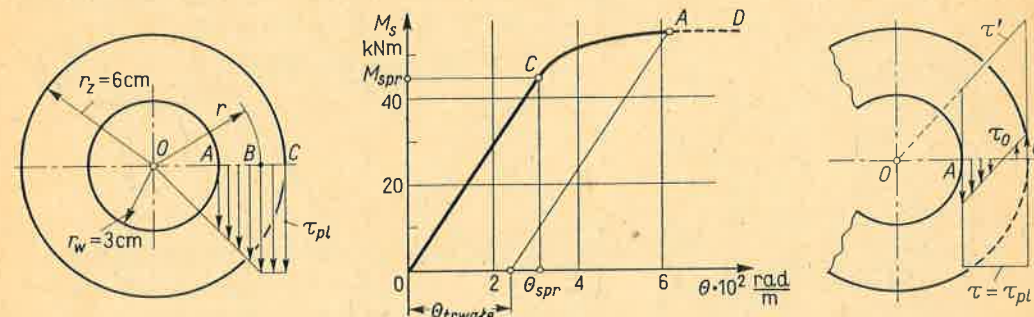
Podobnie przeprowadzamy analizę, gdy materiał pręta odpowiada modelowi idealnie plastycznemu (rys. 14.26c). W takim przypadku można sformułować odpowiednie zależności analityczne.

### Zadania

1. Wyznaczyć zależność  $M_s(\Theta)$  dla drążonego wałka (rys. 14.27) z idealnie plastycznego materiału, jeśli  $G = 7,6 \cdot 10^4$  MPa,  $\tau_{\text{pl}} = 140$  MPa. Określić trwałe skręcenie i naprężenia resztkowe, gdy przy obciążeniu cały przekrój jest uplastyczniony.

Rozwiązanie. Jako parametr weźmy promień  $OB = r$ , dzielący przekrój na wewnętrzną część sprężystą ( $\tau < \tau_{\text{pl}}$ ) i zewnętrzną uplastycznioną ( $\tau = \tau_{\text{pl}} = \text{const}$ ). Moment  $M'_s$  przenoszony przez część sprężystą jest według wzoru (3.14)

$$M'_s = \pi (r^4 - r_w^4) \tau_{\text{pl}}/2,$$



Rys. 14.27. Skręcanie wałka z materiału idealnie plastycznego

a moment  $M'_s$  przenoszony przez część uplastycznioną

$$M''_s = 2\pi\tau_{\text{pl}} \int_r^{r_z} r^2 dr = 2\pi (r_z^3 - r^3) \tau_{\text{pl}}/3.$$

Całkowity moment  $M_s$  jest więc

$$M_s = M'_s + M''_s = \frac{\pi r_z^3 \tau_{\text{pl}}}{2} \left[ \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{r}{r_z} \right)^3 - \left( \frac{r_w}{r_z} \right)^4 \left( \frac{r_z}{r} \right) \right],$$

a ponadto z zależności (a) mamy  $\Theta = \gamma_{\text{spr}}/r = \tau_{\text{pl}}/Gr$ . Biorąc teraz szereg wartości  $r$  w przedziale  $r_w, r_z$  otrzymujemy krzywą  $OAC$  podaną na wykresie  $M_s(\Theta)$ . Punkt  $C$  odpowiada początkowi uplastycznienia, gdy  $r = r_z$ , a jego współrzędne są

$$M_{\text{spr}} = (\pi r_z^3 \tau_{\text{pl}}/2) [1 - (r_w/r_z)^4] = 44,5 \text{ kNm}, \quad \Theta_{\text{spr}} = \tau_{\text{pl}}/Gr_z = 3,07 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}.$$

Punkt  $A$  odpowiada pełnemu uplastycznieniu, gdy  $\tau_A = \tau_{\text{pl}}$ ,  $r = r_w$  i oznacza stan graniczny. Ponieważ  $r_w = 0,5 r_z$ , zatem

$$M_A = M_{\text{gran}} = 7\pi r_z^3 \tau_{\text{pl}}/12 = 55,3 \text{ kNm}, \quad \Theta_A = 2\Theta_{\text{spr}} = 6,14 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}.$$

Trwałe skręcenie wyznaczamy z wzoru (e) biorąc  $\Theta = \Theta_A$  i  $M_s = M_A$ , skąd otrzymujemy  $\Theta_{\text{trwale}} = 2,28 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m} = 1,31^\circ/\text{m}$ . Rozkład naprężeń resztkowych  $\tau_0(r)$  jest różnicą wykresu  $\tau(r) = \tau_{\text{pl}} = \text{const}$  przy obciążeniu momentem  $M_A$  i rozkładu

$$\tau'(r) = M_A r/J_0$$

przy odciążeniu, gdy materiał zachowuje się sprężysto. Odpowiednie wartości  $(\tau_0)_C = -36$  MPa i  $(\tau_0)_A = 52$  MPa.

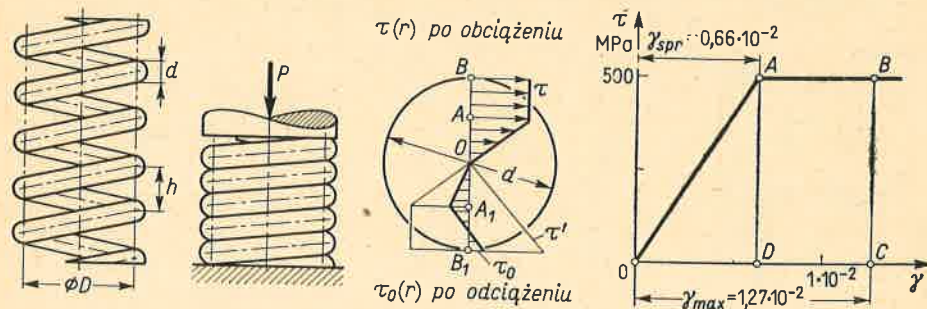
2. Stalową sprężynę (rys. 14.28a) ściśnięto aż do pełnego styku zwojów. Przyjmując, że materiał sprężyny jest idealnie plastyczny ( $\tau_{\text{pl}} = 500$  MPa,  $G = 7,6 \cdot 10^4$  MPa) określić skok  $h_1$  sprężyny po odciążeniu, jeśli  $D = 30$  mm,  $d = 6$  mm,  $h = 12$  mm.

Rozwiązanie. Jak wiemy, drut sprężyny pracuje głównie na skręcanie, a każdy element  $ds$  drutu skręca się o kąt  $d\varphi = \Theta ds$ . Odpowiadające temu poosiowe przesunięcie  $f_1$  (zmiana skoku) jednego zwoju obliczamy jak w art. 9.5 i przy tych samych uproszczeniach (pominięcie momentów gnących, sił tnących

itd.) biorąc jedynie  $d\varphi = \Theta ds$  zamiast  $d\varphi = M_s ds/C$ . W wyniku zamiast wzoru (h) z art. 9.5 mamy

$$f_1 = \int m_s \Theta ds = \Theta D l / 2 = \pi D^2 \Theta / 2,$$

gdyż dla jednego zwoju długość drutu  $l \approx \pi D$ . Zależność powyższa obowiązuje zarówno w zakresie sprężystym, jak i sprężysto-plastycznym, gdyż wynika z ogólnej metody określenia przemieszczeń.



Rys. 14.28. Analiza skutków tzw. dobicia sprężyny

Przy pełnym ściśnięciu zwojów  $f_1 = h - d$ , wobec czego

$$\Theta = 2(h-d)/\pi D^2 = 2(12-6)/\pi 30^2 = 4,25 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1} = 4,25 \text{ m}^{-1},$$

a odpowiadający temu maksymalny kąt  $\gamma_{max}$  według wzoru (a)

$$\gamma_{max} = \Theta d / 2 = 4,25 \cdot 6 \cdot 10^{-3} / 2 = 1,27 \cdot 10^{-2} \text{ rad}.$$

Ponieważ  $\gamma_{max} > \gamma_{spr} = \tau_{pl} / G = 0,66 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ , zatem rozkład  $\tau(r)$  na przekroju drutu jest taki, jak podaje rysunek. Na wykresie  $\tau(\gamma)$  temu rozkładowi odpowiada linia  $OAB$ . Moment bezwładności  $J_\tau$  figury  $OABCD$  jest przy tym

$$J_\tau = \int \tau \gamma^2 d\gamma = (\tau_{pl} \gamma_{max}^3 / 3) - (\tau_{pl} \gamma_{spr}^3 / 12) = 330 \text{ N/m}^2,$$

a według wzoru (14.5) moment skrawający

$$M_s = 2\pi J_\tau \Theta^3 = 2\pi 330 / 4,25^3 = 26,9 \text{ Nm}.$$

Przy odciążeniu następuje odwrotne skręcenie  $\Theta'$  o wartości

$$\Theta' = M_s / G J_0 = 26,9 / 7,6 \cdot 10^{10} \cdot (\pi 6^4 \cdot 10^{-12} / 32) = 2,78 \text{ m}^{-1},$$

któremu odpowiada rozsuniecie się zwoju  $f'_1$

$$f'_1 = \pi^2 D^2 \Theta' / 2 = 3,93 \text{ mm},$$

oraz poszukiwany skok zwoju  $h_1 = d + f'_1 = 9,93 \text{ mm}$ .

Rozkład naprężeń resztkowych  $\tau_0(r)$  jest różnicą  $\tau(r)$  przy obciążeniu i  $\tau'(r)$  przy odciążeniu. Dla przykładu

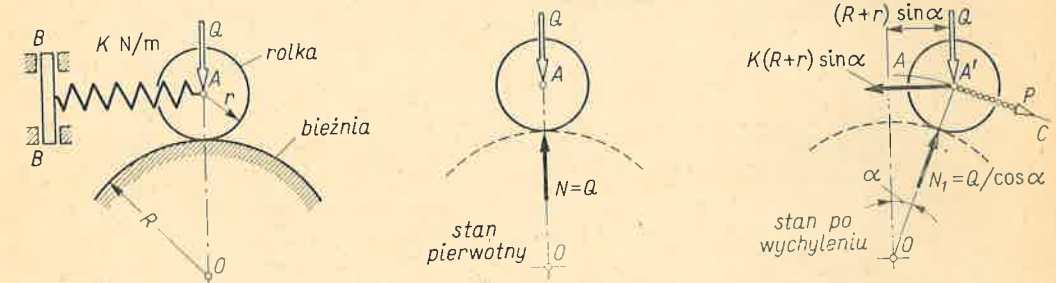
$$(\tau_0)_{B_1} = \tau_{pl} - (M_s / W_0) = 500 - (26,9 \cdot 16 / \pi 0,6^3) = -133 \text{ MPa}.$$

## 15 ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI USTROJÓW

### 15.1. Podstawowe pojęcia. Metody rozwiązania

Jak wykazano w art. 6.3, ściskany smukły pręt przy pewnej tzw. *krytycznej* wartości obciążenia zmienia pierwotną postać równowagi, przy której oś pręta jest prosta, na drugą, w której oś pręta staje się zakrzywiona. To samo zjawisko zmiany postaci równowagi, tzw. *utrata stateczności*, występuje i w innych ustrojach, zwłaszcza w tych, w których jeden wymiar, np. grubość, lub dwa wymiary, np. wymiary przekroju, są małe w porównaniu z pozostałymi. Ponieważ przy utracie stateczności powstają na ogół duże naprężenia dodatkowe prowadzące do zniszczenia ustroju, określenie krytycznych obciążeń jest dla oceny bezpieczeństwa sprawą zasadniczą.

Metodę badania stateczności objaśnimy na przykładzie ustroju (rys. 15.1), w którym rolka o ciężarze  $Q$  połączona jest ze sprężyną i może toczyć się bez tarcia po cylindrycznej bieźni. W pierwotnym położeniu sprężyna jest nie napięta, a równowagę rolki zapewnia



Rys. 15.1. Przykład analizy stateczności ustroju

reakcją bieźni  $N = Q$ . Zbadajmy teraz zachowanie się ustroju przy wychyleniu go z położenia pierwotnej równowagi z uwzględnieniem towarzyszących temu zmian wartości kierunku i charakteru sił. Wychyleniu rolki o kąt  $\alpha$  towarzyszy tu zmiana wartości i kierunku reakcji z  $N$  na  $N_1$  oraz pojawienie się siły  $K(R+r) \sin \alpha$  w sprężynie. Badając na razie tylko małe wychylenie  $\alpha$  widzimy, że na rolkę działa w kierunku  $A'C$  siła

$$P = Q \sin \alpha - K(R+r) \sin \alpha \cos \alpha \approx [Q - K(R+r)] \alpha, \quad (a)$$

której znak zależy od tego, czy  $K(R+r)$  jest większe, mniejsze, czy równe  $Q$ . W pierwszym



przypadku siła ta jest skierowana na lewo i dąży do przywrócenia pierwotnego stanu. Mówimy wtedy, że pierwotny stan równowagi jest trwały, lub inaczej, że ustrój jest *stateczny*. W przypadku drugim siła  $P$  jest skierowana na prawo, a więc dąży do zwiększenia założonego na początku wychylenia. Mówimy, że pierwotny stan równowagi jest nietrwały lub że ustrój jest *nietateczny*. Wreszcie, gdy  $Q = K(R+r)$ , ustrój, niezależnie od pierwotnego stanu równowagi, zachowuje ją również po wychyleniu i mówimy wtedy, że ustrój jest w stanie równowagi obojętnej. Tak więc stan równowagi *obojętnej* rozdziela grupę stanów równowagi trwałej, gdy  $Q < K(R+r)$ , od nietrwałej, gdy  $Q > K(R+r)$ , a odpowiadające mu obciążenie

$$Q_{kr} = K(R+r) \quad (b)$$

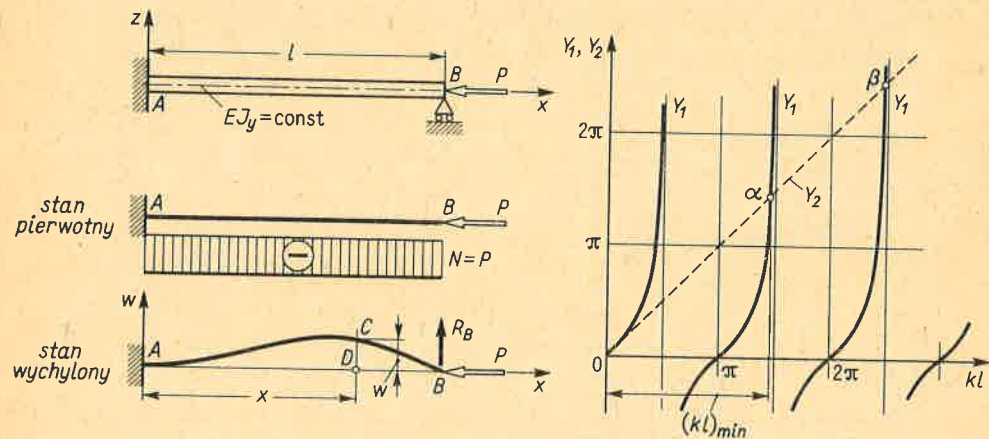
nazywamy *obciążeniem krytycznym*. Jak widać, określenie tego obciążenia zawiera następujące etapy postępowania:

a) określenie stanu równowagi pierwotnej (postać odkształceń, charakter i wartość wszystkich sił wewnętrznych i zewnętrznych),

b) określenie wychylenia ustroju z pierwotnej równowagi i towarzyszących temu zmian wartości, kierunków i charakteru wszystkich sił,

c) sformułowanie i rozwiązanie warunku równowagi ustroju w stanie wychylonym oraz dyskusja wyników.

Opisaną metodę badania stateczności, zwaną *metodą analizy równowagi*, zastosujemy do pryzmatycznego pręta utwierdzonego na jednym, a podpartego na drugim końcu (rys. 15.2). W stanie pierwotnej równowagi pręt jest prosty, a reakcja podpory  $B$  jest



Rys. 15.2. Przykład analizy wyboczenia pręta

równa zero. Jedynym obciążeniem jest siła  $P$ , wywołująca stałą na całej długości siłę wzdłużną  $N = P$ . W ten sposób kończymy etap a) zadania.

Wykorzystując fakt doświadczalny, że ściskany pręt może przy pewnej wartości obciążenia przejść z pierwotnej postaci równowagi w drugą postać z wygiętą osią, zakładamy, że rozpatrywanym wychyleniem jest *małe* ugięcie  $w$  w płaszczyźnie  $xz$ . W porównaniu z przykładem poprzednim różnicę stanowi to, że wychylenie  $w$  jest funkcją  $x$ , a nie para-

metrem, jakim był kąt  $\alpha$ . Temu wychyleniu towarzyszy nie tylko pojawienie się reakcji  $R_B$  jako obciążenia dodatkowego do siły  $P$ , lecz także zmiana sposobu pracy pręta spowodowana zginaniem. Na wysiłek przekroju składają się teraz nie tylko siła wzdłużna, lecz i siła tnąca oraz moment gnący, którego wartość określona z wzoru (5.20)

$$M_g = EJ_y w'' \quad (c)$$

przedstawia moment naprężeń normalnych w badanym przekroju  $C$ . Na tym kończy się etap b) rozwiązania.

Przystępując do etapu c) zauważmy, że równowaga każdego elementu pręta w stanie wychylonym istnieje, gdy wynikający z naprężeń moment  $M_g$  jest równy momentowi od obciążenia. Ten ostatni ma w badanym przekroju  $C$  wartość

$$-P \cdot \overline{CD} + R_B(l-x) = -Pw + R_B(l-x), \quad (d)$$

wobec czego z przyrównania (c) i (d) otrzymujemy

$$EJ_y w'' + Pw = R_B(l-x). \quad (e)$$

To równanie różniczkowe określa ugięcie  $w(x)$  jako

$$w(x) = B_1 \sin kx + B_2 \cos kx + (R_B/P)(l-x), \quad (f)$$

gdzie  $B_1, B_2$  — nie znane na razie stałe całkowania, a parametr

$$k = \sqrt{P/EJ_y} \text{ m}^{-1}. \quad (15.1)$$

Stałe  $B_1$  i  $B_2$  oraz nie znaną reakcję  $R_B$  określimy z warunków

$$(w)_{x=0} = 0, \quad (w')_{x=0} = 0, \quad (w)_{x=l} = 0,$$

dających w wyniku następujące równania jednorodne:

$$B_2 + (R_B/P)l = 0, \quad B_1 k - (R_B/P) = 0, \quad B_1 \sin kl + B_2 \cos kl = 0.$$

Wyznaczając z dwóch pierwszych równań  $R_B = kPB_1$ ,  $B_2 = -B_1 kl$  otrzymujemy z trzeciego równania zależność

$$B_1(\sin kl - kl \cos kl) = 0. \quad (g)$$

Pierwszym rozwiązaniem wynikającym z tej zależności jest  $B_1 = 0$ , a w następstwie  $B_2 = 0$  i  $R_B = 0$  i wtedy  $w(x) = 0$ . Wynik ten odpowiada pierwotnej równowadze pręta w postaci prostej, który jako nieinteresujący pomijamy. Istotne natomiast jest drugie rozwiązanie, w którym  $B_1 \neq 0$  odpowiada równowadze pręta w postaci wygiętej, i które zachodzi, gdy

$$\text{tg } kl = kl. \quad (h)$$

Warunek (h) określa siłę krytyczną  $P_{kr}$  ukrytą w parametrze  $k$ . Ponieważ równanie (h) jest przestępne względem  $k$ , rozwiązujemy je wykreślnie rysując funkcje

$$Y_1 = \text{tg } kl, \quad Y_2 = kl,$$

w funkcji argumentu  $kl$ . Punkty przecięcia  $\alpha, \beta, \dots$  dają wartości  $kl$  spełniające równanie (g), przy czym znaczenie techniczne ma wartość  $(kl)$  odpowiadająca punktowi  $\alpha$ . Widać, że  $(kl)_{\min} < 3\pi/2$ , a dokładniejsze rachunki dają

$$(kl)_{\min} \approx 4,493.$$

Podstawiając tę wartość do (15.1) wyznaczamy  $P_{kr} \approx 20,19EJ_y/l^2$ . Wynikowi temu na-

dajemy postać, jak w przypadku podstawowym wybożenia pręta zakończonego przegubami (art. 6.3), tzn.

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_y}{l_s^2}, \quad (15.2)$$

gdzie  $l_s$  — swobodna długość wynosząca w tym przypadku

$$l_s = \pi l / \sqrt{20,19} \approx 0,70l, \quad (i)$$

Wynik powyższy podano poprzednio bez dowodu na rys. 6.24.

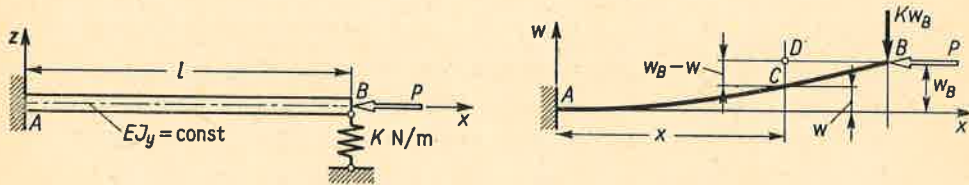
Podobnie jak w art. 6.3 otrzymane tu rozwiązanie nasuwa kilka wątpliwości. Przede wszystkim nie znana jest wartość stałej  $B_1$ , a w następstwie i maksymalnego ugięcia. Ponadto nie jest jasne zachowanie się pręta przy sile  $P$  nieco większej od  $P_{kr}$ . W tym bowiem przypadku równanie (h) nie jest spełnione, wobec czego z równania (g) mamy znowu  $B_1 = 0$  oraz  $B_2 = 0$  i  $R_B = 0$ , czyli równowagę w postaci prostej. Paradoks polega więc na tym, że przy  $P = P_{kr}$  mamy równowagę w postaci wygiętej, a przy trochę większym  $P$  pręt staje się znowu prosty.

Przyczyną tych niekonsekwencji jest, że zależność (c) jest przybliżona i stosuje się tylko do małych ugięć. Przy  $P > P_{kr}$  ugięcia rosną tak szybko, że potrzeba stosować pełne równanie linii ugięcia, tj. równanie (a) z art. 5.8, i wtedy otrzymuje się jednoznaczne odpowiedzi bez powyższych wątpliwości.

### Zadania

1. Wyznaczyć krytyczną wartość siły  $P$  przyrządkowego pręta wspornikowego z dodatkową sprężystą podporą (rys. 15.3).

Rozwiązanie. Ponieważ etap a) jest identyczny, jak w przykładzie z rys. 15.2, przechodzimy od razu do etapu b), w którym zakładamy wychylenie  $w(x)$ , jak podaje rysunek. Temu wychyleniu towa-



Rys. 15.3. Wybożenie wspornika z dodatkową podporą sprężystą

rzyszy pojawienie się reakcji sprężyny  $Kw_B$ , wobec czego w badanym przekroju  $C$  moment gnyący od obciążenia jest

$$P \cdot \overline{CD} - Kw_B(l-x) = P(w_B - w) - Kw_B(l-x).$$

Równowaga każdego elementu wybożonego pręta zajdzie, gdy

$$EJ_y w'' = P(w_B - w) - Kw_B(l-x),$$

skąd po uporządkowaniu otrzymujemy równanie różniczkowe

$$EJ_y w'' + Pw = [P - K(l-x)] w_B,$$

w którym  $w_B$  jest wartością stałą. Rozwiązanie równania

$$w(x) = B_1 \sin kx + B_2 \cos kx + [1 - (K/P)(l-x)] w_B$$

zawiera stałe całkowania  $B_1$  i  $B_2$ , przy czym  $k = \sqrt{P/EJ_y}$ . Do wyznaczenia tych stałych oraz ugięcia  $w_B$  mamy teraz warunki

$$(w)_{x=0} = 0, \quad (w')_{x=0} = 0, \quad (w)_{x=l} = w_B,$$

dające w wyniku następujący układ równań jednorodnych

$$\begin{aligned} 0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + [1 - (Kl/P)] w_B &= 0, \\ k B_1 + 0 \cdot B_2 + (K/P) w_B &= 0, \\ \sin kl B_1 + \cos kl B_2 + 0 \cdot w_B &= 0. \end{aligned}$$

Trywialne rozwiązanie tego układu, tj.  $B_1 = B_2 = w_B = 0$ , oznacza równowagę pręta w postaci prostej. Niezerowe rozwiązanie, czyli równowagę w postaci wygiętej, otrzymamy przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny  $D$  tego układu równań, tj.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 - (Kl/P) \\ k & 0 & K/P \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

W wyniku tego mamy zależność<sup>(1)</sup>

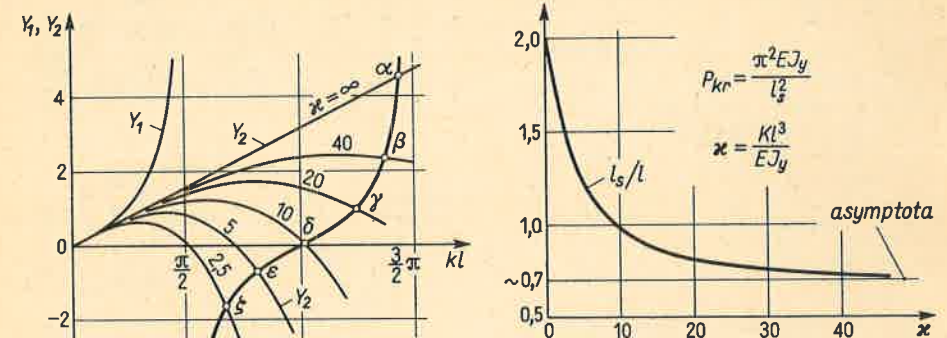
$$(K/P) \sin kl + k [1 - (Kl/P)] \cos kl = 0,$$

która po przekształceniach ma postać

$$\operatorname{tg} kl = kl - (EJ_y/Kl^3) (kl)^3.$$

Wartość  $(kl)_{\min}$  spełniającą to równanie przestępne wyznaczamy wykreślnie (rys. 15.4) jako odcięta odpowiadającą punktom  $\alpha, \beta, \dots$  przecięcia krzywej  $Y_1 = \operatorname{tg} kl$  z krzywą

$$Y_2 = kl - (1/\kappa) (kl)^3,$$



Rys. 15.4. Wynik rozwiązania wybożenia z rys. 15.3

gdzie parametr  $\kappa = Kl^3/EJ_y$  charakteryzuje względną sztywność sprężyny. Przypadek  $\kappa = \infty$  odpowiada sztywnej podporze jak na rys. 15.2 i wtedy  $l_s \approx 0,70l$ . Przypadek  $\kappa = 0$  oznacza pręt wspornikowy bez podpory i wtedy  $l_s = 2l$  (art. 6.4). W sytuacjach pośrednich wartości  $l_s/l$  podaje rysunek.

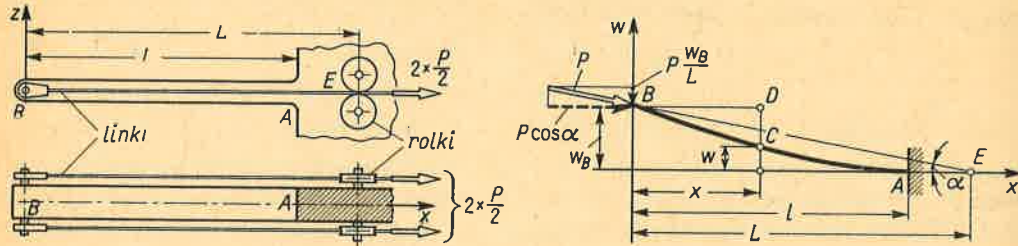
2. Wspornikowy pręt (rys. 15.5) obciążony jest siłą  $P$  za pośrednictwem dwóch linek, z których każda przechodzi bez luzu i tarcia między stałymi rolkami. Wyznaczyć wartość siły  $P_{kr}$ .

<sup>(1)</sup> Ten sam wynik otrzymamy rugując kolejno z równań niewiadome i dochodząc do równania typu (g).



Rozwiązanie. Obraz pręta w stanie wygiętym jest podobny do rys. 15.3, gdyż linki powodują zmianę kierunku siły  $P$ , w wyniku czego na koniec  $B$  działają: pozioma siła  $P \cos \alpha \approx P$  oraz pionowa  $P \sin \alpha \approx P$ . Ta ostatnia spełnia więc rolę sprężyny o sztywności  $K = P/L$ . Wstawiając tę wartość do równania określającego wielkość  $kl$  mamy teraz zależność

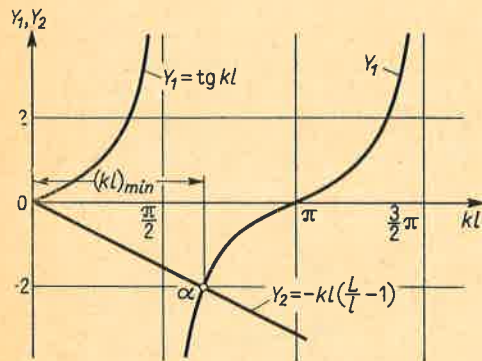
$$\operatorname{tg} kl = -kl \left[ \frac{L}{l} - 1 \right],$$



Rys. 15.5. Wyboczenie pręta ze sterowaną zmianą kierunku siły  $P$

której rozwiązanie metodą wykreślną (rys. 15.6) daje wartość  $(kl)_{\min}$ . Widać, że gdy  $L/l > 1$ , czyli gdy rolki prowadzące linki są na prawo od punktu  $A$ , wówczas  $(\pi/2) < (kl)_{\min} < \pi$ . Gdy  $L = l$ , wówczas  $(kl)_{\min} = \pi$ , a swobodna długość  $l_s = l$  jak dla pręta przegubowo podpartego na końcach (przypadek podstawowy). Gdy  $L < l$ , prosta  $Y_2$  przecina krzywą  $Y_1$  dla  $kl$  w przedziale  $\pi, 3\pi/2$  i wtedy  $l_s < l$ . Powyższa dyskusja wskazuje, jak dużą rolę w analizie wyboczenia odgrywa kwestia zmiany kierunku sił obciążających.

3. Wyznaczyć wartość  $P_{kr}$  dla pręta o sztywności skokowo zmiennej (rys. 15.7). Zbadać przypadek, gdy  $EJ_{y1} = 4EJ_{y2}$ ,  $a = b = l/2$ .



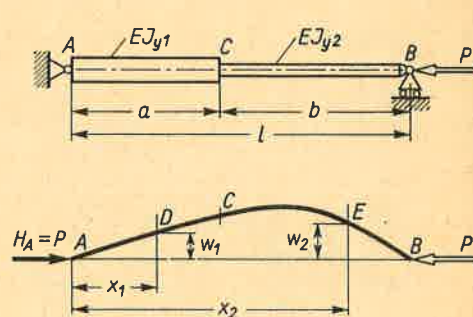
Rys. 15.6. Rozwiązanie równania  $\operatorname{tg} kl = -kl \left[ \frac{L}{l} - 1 \right]$

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od razu od analizy pręta w stanie wychylonym. Pionowe reakcje na podporach są równe zeru, a jedynym obciążeniem jest siła  $P$  i reakcja  $H_A = P$ . Z racji różnej sztywności odcinków  $AC$  i  $CB$  wychylenie  $w(x)$  oznaczamy odpowiednio przez  $w_1(x)$  i  $w_2(x)$ , wobec czego moment gnący

$$M_{\theta 1} = -Pw_1, \quad 0 \leq x_1 \leq a, \quad M_{\theta 2} = -Pw_2, \quad a \leq x_2 \leq l.$$

Równania równowagi w obrębie odcinków  $AC$  i  $CB$  są

$$[EJ_{y1} w_1'' + Pw_1 = 0, \quad EJ_{y2} w_2'' + Pw_2 = 0,$$



Rys. 15.7. Do zadania 3

a ich rozwiązanie przy oznaczeniach  $k_1 = \sqrt{P/EJ_{y1}}$ ,  $k_2 = \sqrt{P/EJ_{y2}}$  jest

$$w_1(x) = B_1 \sin k_1 x + B_2 \cos k_1 x, \quad w_2(x) = C_1 \sin k_2 x + C_2 \cos k_2 x.$$

Stałe  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$  i  $C_2$  wyznaczamy z następujących warunków;

$$(w_1)_{x_1=0} = 0, \quad (w_1)_{x_1=a} = (w_2)_{x_2=a}, \quad (w_1')_{x_1=a} = (w_2')_{x_2=a}, \quad (w_2)_{x=l} = 0,$$

z których pierwszy i czwarty wynika z podparcia pręta na podporach  $A$  i  $B$ , pozostałe zaś są warunkami ciągłości w przekroju  $C$ . Warunek pierwszy daje  $B_2 = 0$ , pozostałe zaś po uporządkowaniu stanowią układ trzech równań jednorodnych

$$\begin{aligned} \sin k_2 a C_1 + \cos k_2 a C_2 - \sin k_1 a B_1 &= 0, \\ k_2 \cos k_2 a C_1 - k_2 \sin k_2 a C_2 - k_1 \cos k_1 a B_1 &= 0, \\ \sin k_2 l C_1 + \cos k_2 l C_2 + 0 \cdot B_1 &= 0. \end{aligned}$$

Przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny tego układu, jak w zadaniu 1, otrzymujemy równanie przestępne

$$k_2 \operatorname{tg} k_1 a + k_1 \operatorname{tg} k_2 b = 0$$

określające siłę  $P$ , dla której zachodzi równowaga w postaci wygiętej. Nie wnikając w szczegóły rozwiązania zbadajmy przypadek, gdy  $a = b = l/2$ ,  $EJ_{y1} = 4EJ_{y2}$ , tj. gdy  $2k_1 = k_2$ ,  $k_1 a = k_1 l/2$ ,  $k_2 b = k_1 l$ , a poprzednie równanie jest

$$2 \operatorname{tg} (k_1 l/2) + \operatorname{tg} k_1 l = 0.$$

Rozwiązanie tego równania daje dwie odpowiedzi:

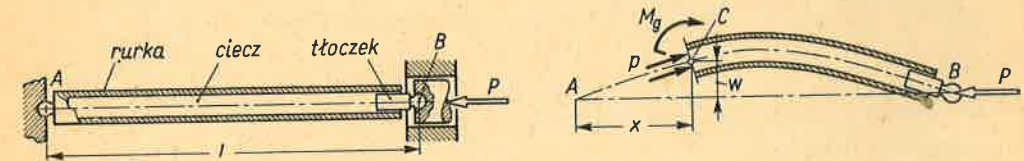
$$\operatorname{tg} (k_1 l/2) = 0, \quad \text{skąd} \quad k_1 l = 2\pi, \quad \operatorname{tg} (k_1 l/2) = \sqrt{2}, \quad \text{skąd} \quad k_1 l \approx 1,908,$$

z których druga odpowiada mniejszej sile krytycznej

$$P_{kr} \approx \frac{1,908^2 \cdot EJ_{y1}}{l^2} \approx \frac{3,64 EJ_{y1}}{l^2} \approx \frac{14,6 EJ_{y2}}{l^2}.$$

Widać, że  $(\pi^2 EJ_{y2}/l^2) < P_{kr} < (\pi^2 EJ_{y1}/l^2)$ . Wartość  $\pi^2 EJ_{y2}/l^2$  odpowiada wyboczeniu pręta o stałej sztywności  $EJ_{y2}$  (mniejszej), w stosunku do czego pręt rzeczywisty wzmocniony na odcinku  $AC$  jest sztywniejszy. Podobnie uzasadnia się drugie ograniczenie, tj.  $P_{kr} < \pi^2 EJ_{y1}/l^2$ .

4. Nieważka rurka zapełniona cieczą i nieściśliwą cieczą zamknięta jest szczelnym tłoczkiem mogącym się poruszać bez tarcia (rys. 15.8). Zakończenie rurki i tłoczek stanowią przeguby. Działanie siły  $P$  na tłoczek wywołuje ciśnienie w cieczy, przy czym nie ma siły ściskającej w rurce. Czy w takich warunkach rurka może utracić stateczność?



Rys. 15.8. Wyboczenie rury z cieczą

Odp. Utrata stateczności nastąpi jak w zwykłym przecie. Jeśli bowiem przeciąć myślowo rurkę w stanie wychylonym, to widać, że siła  $P$  daje w przekroju  $C$  moment  $M = -Pw$ , którego nie równoważy bynajmniej ciśnienie  $p$  cieczy. Aby istniała równowaga, w rurce muszą powstać naprężenia normalne dające moment  $M_\theta = EJ_y w''$ , skąd otrzymujemy równanie

$$EJ_y w'' = -Pw \quad \text{lub} \quad EJ_y w'' + Pw = 0,$$

Jego rozwiązanie przy oznaczeniu  $k = \sqrt{P/EJ_y}$  jest

$$w = B_1 \sin kx + B_2 \cos kx,$$



a warunki brzegowe  $(w)_{x=0} = 0$  i  $(w)_{x=l} = 0$  dają  $B_2 = 0$  oraz

$$B_1 \sin kl = 0.$$

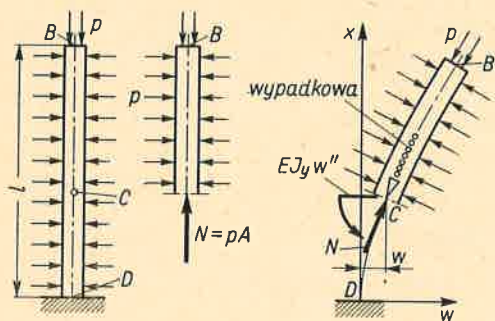
Jak widać, może istnieć równowaga rurki w stanie wygiętym, gdy  $\sin kl = 0$ ,  $(kl)_{min} = \pi$ , a siła

$$P_{kr} = \pi^2 EJ_y / l^2$$

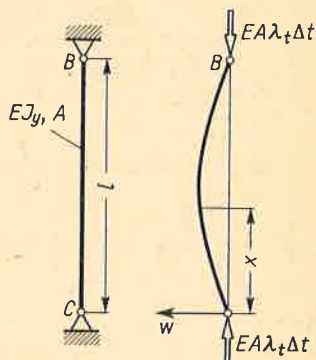
jest więc taka, jak gdyby siła  $P$  działała na rurkę bezpośrednio.

5. Na pryzmatyczny pionowy pręt wywarto za pośrednictwem cieczy ciśnienie  $p$  wywołujące w pręcie siłę ściskającą  $N = pA$  (rys. 15.9). Czy w tych warunkach pręt może wyboczyć się?

Odp. Nie. Załóżmy na chwilę, że pręt ma postać wygiętą. Ciśnienie  $p$  działające na całą powierzchnię (boczną i górną) odciętej myślowo części  $BC$  ma wypadkową  $pA$  prostopadłą do przekroju  $C$  i przechodzącą przez jego środek ciężkości, nie daje natomiast żadnego momentu zginającego. Wynikający ze zgięcia pręta moment  $EJ_y w''$  jest więc równy zeru, skąd wynika  $w \equiv 0$ , czyli równowaga w postaci prostej. Codziennym przykładem tego są rośliny w wodzie, które mimo swej wiotkości zachowują prostą postać



Rys. 15.9. Do zadania 5



Rys. 15.10. Do zadania 6

6. Pryzmatyczny nieważki pręt oparty na nieprzesuwnych przegubach (rys. 15.10) ogrzewamy równomiernie o  $\Delta t$ . Wyznaczyć wartość  $\Delta t_{kr}$ , przy której pręt ulegnie wyboczeniu.

Odp. Wobec braku swobody wydłużenia się powstaje w pręcie siła ściskająca  $P = EA \lambda_t \Delta t$  (art. 10.8). Wyboczenie nastąpi, gdy  $P = P_{kr} = \pi^2 EJ_y / l^2$ , skąd  $\Delta t_{kr} = \pi^2 / \lambda^2 \lambda_t$ , gdzie  $\lambda = l/i$ , smukłość pręta, a  $\lambda_t$  — współczynnik rozszerzalności liniowej.

### 15.2. Energetyczna metoda badania stateczności ustrojów

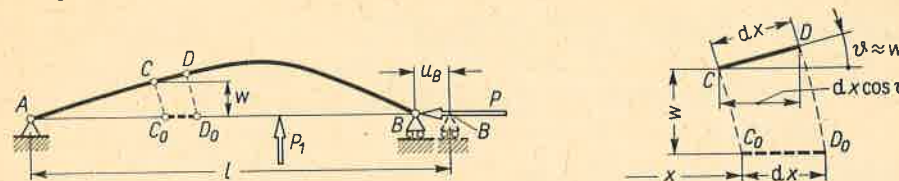
Badanie stateczności ustrojów metodą analizy równowagi daje wynik w postaci równań różniczkowych. Ich rozwiązanie, jak widzieliśmy, prowadzi do równań przestępnych nasywających często duże trudności rachunkowe. Z tych powodów w wielu bardziej złożonych zagadnieniach stosuje się metodę energetyczną umożliwiającą rozwiązanie nie tylko ściśle, lecz i przybliżone. W tym drugim przypadku za cenę pewnej niedokładności wyniku otrzymuje się znaczne uproszczenie rachunków.

Metodę energetyczną objaśnimy na przykładzie pręta przegubowo podpartego na końcach (rys. 15.11). W położeniu pierwotnej równowagi, gdy oś pręta jest prosta, jego

energia  $U_0$  wynika ze ściskania siłą  $P$  i według wzoru (2.9) ma wartość

$$U_0 = P^2 l / 2EA.$$

Przy wychyleniu z położenia pierwotnego, gdy oś pręta staje się zakrzywiona, energia pręta zwiększa się<sup>(1)</sup> o człon  $\Delta U$  odpowiadający zginaniu. Jednocześnie na skutek prze-



Rys. 15.11. Ilustracja zależności przy metodzie energetycznej

sunięcia się podpory  $\overline{BB} = u_B$  maleje energia potencjalna obciążenia  $P$  o wielkość  $-Pu_B$ . W rezultacie zmiana  $\Delta \Pi$  całkowitej energii potencjalnej układu

$$\Delta \Pi = \Delta U - Pu_B. \tag{a}$$

Jeśli  $\Delta \Pi$  jest dodatnie, to oznacza, że wychyleniu pręta z położenia pierwotnego towarzyszy wzrost energii układu. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy jakieś obce siły zewnętrzne, na przykład  $P_1$ , wykonają odpowiednią pracę  $\Delta L = \Delta \Pi$ . Jeśli tych obcych sił nie ma, to układ sam z siebie nie ma tendencji do przejścia w stan wychylony. Innymi słowy  $\Delta \Pi > 0$  oznacza stan równowagi trwałej. Gdy  $\Delta \Pi < 0$ , wówczas każde najmniejsze wychylenie powoduje oddawanie energii na zewnątrz przejawiające się w ruchu układu i jego tendencji do przejścia w położenie inne niż pierwotne. Jeśli więc  $\Delta \Pi < 0$ , to układ jest niestateczny. Wreszcie w przypadku

$$\Delta \Pi = 0 \tag{15.3}$$

mamy stan równowagi obojętnej, w którym układ wychylony z pierwotnego położenia nie ma tendencji do żadnej zmiany tego wychylenia. Obciążenie  $P$  odpowiadające energetycznemu warunkowi (15.3) jest więc obciążeniem krytycznym.

Dostosowując ogólny warunek (15.3) do badanego tu przypadku pręta wyrażmy wielkości  $\Delta U$  i  $u_B$  w funkcji założonego ugięcia  $w(x)$ . Jak wiadomo z art. 9.7, energia od zginania jest

$$\Delta U = \int (M_g^2 / 2EJ_y) dx,$$

a ponieważ moment gnący  $M_g = EJ_y w''$ , zatem

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_y (w'')^2 dx. \tag{15.4}$$

Aby obliczyć przesunięcie  $u_B$ , zauważmy, że po wychyleniu element  $\overline{C_0 D_0} = dx$  zajmuje położenie  $CD$ , a jego rzut na oś  $AB$  jest  $dx \cos \theta$ . Ponieważ  $w(x)$  jest z założenia małe, można przyjąć, że

$$\theta \approx w', \quad \cos \theta \approx 1 - (\theta^2/2) \approx 1 - [(w')^2/2].$$

<sup>(1)</sup> Przy małych wychyleniach energię  $U_0$  można uważać za stałą.



Sumując rzuty wszystkich elementarnych odcinków i odejmując od pierwotnej długości  $l$  otrzymujemy

$$u_B \approx l - \int_0^l \left[ 1 - \frac{(w')^2}{2} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 dx. \quad (15.5)$$

W rezultacie warunek  $\Delta II = 0$  przyjmuje postać

$$\int_0^l EJ_y (w'')^2 dx - P_{kr} \int_0^l (w')^2 dx = 0, \quad (15.6)$$

w której funkcję  $w(x)$  przyjęto jako znaną. W badanym przypadku niech taką funkcją będzie półfala sinusoidy

$$w(x) = f \sin(\pi x/l) \quad (b)$$

przechodząca przez punkty  $A$  i  $B$ , gdyż  $(w)_{x=0} = (w)_{x=l} = 0$ . Wstawiając do wzorów (15.4) i (15.5) odpowiednio

$$w' = (\pi f/l) \cos(\pi x/l), \quad w'' = -(\pi^2 f/l^2) \sin(\pi x/l)$$

i wykonując całkowanie otrzymujemy

$$\Delta U = \pi^4 EJ_y f^2/4 l^3, \quad u_B = \pi^2 f^2/4l.$$

W wyniku z wzoru (15.6) mamy wartość siły krytycznej

$$P_{kr} = \pi^2 EJ_y/l^2 \quad (c)$$

identyczną z ścisłą wartością (6.14), gdyż przyjęta funkcja  $w(x)$  jest taka, jak wynika z rozwiązania różniczkowego równania równowagi (patrz także zadanie 4 art. 15.1). Na ogół jednak ta ścisła postać  $w(x)$  nie jest znana i wtedy określamy  $P_{kr}$  w sposób przybliżony dobierając krzywą  $w(x)$  pasującą do fizycznych warunków zadania. Tymi warunkami są w pierwszym rzędzie więzy kinematyczne, jak ugięcia lub kąty ugięcia w punktach podparcia pręta. Dla uzyskania dobrego przybliżenia wartości  $P_{kr}$  pożądanym jest, aby dobrana krzywa  $w(x)$  spełniała także warunki statyczne, np. zerowa wartość momentu gnącego na podporze przegubowej. Poza tym w doborze  $w(x)$  duże znaczenie ma intuicyjne wyzucie ogólnego charakteru krzywej i takie jej cechy jak symetria itp.

Sens tych wskazówek prześledzimy na przykładzie pręta z rys. 15.11, zakładając  $w(x)$  w postaci wielomianu  $x$ . Ponieważ przewidujemy symetryczną postać ugięcia, zatem dla wygody obieramy początek układu w środku pręta i wtedy  $w(x)$  ma postać

$$w(x) = a_0 + a_2(2x/l)^2 + a_4(2x/l)^4, \quad (d)$$

w której występują tylko parzyste potęgi  $x$ . Liczbę parametrów  $a$  ograniczono przy tym do trzech. Tak obrana funkcja ma spełniać warunek  $(w)_{x=\pm l/2} = 0$  oraz  $(w'')_{x=\pm l/2} = 0$ , gdyż na podporach  $A$  i  $B$  zarówno  $w$  jak i moment  $M_g = EJ_y w''$  są równe zeru. Z warunków tych wynika, że

$$a_0 + a_2 + a_4 = 0, \quad a_2 + 6a_4 = 0,$$

czyli, że  $a_2 = -6a_4$ ,  $a_0 = 5a_4$ . Otrzymana stąd funkcja

$$w(x) = a_4[5 - 6(2x/l)^2 + (2x/l)^4]$$

ma jeden swobodny parametr  $a_4$ . Po wstawieniu jej do (15.6) i scałkowaniu w granicach  $+l/2, -l/2$  otrzymujemy siłę

$$P_{kr} = \frac{168}{17} \frac{EJ_y}{l^2} \approx 9,882 \frac{EJ_y}{l^2} \quad (e)$$

zamiast ścisłej wartości  $\pi^2 EJ_y/l^2 \approx 9,870 EJ_y/l^2$ . Jak widać, różnica nie przekracza  $1,2/100$ , przy czym wartość  $P_{kr}$  z rozwiązania przybliżonego jest większa niż rzeczywista. Ta ostatnia cecha jest wspólna dla wszystkich energetycznych rozwiązań przybliżonych.

Gdyby w założonym wyrażeniu  $w(x)$  ograniczyć się do dwóch pierwszych składników, wówczas moglibyśmy spełnić tylko warunek  $(w)_{x=\pm l/2} = 0$ , natomiast nie byłby spełniony warunek  $(M_g)_{x=\pm l/2} = 0$ . W takim przypadku  $a_2 = -a_0$  i z wzoru (15.6)

$$P_{kr} = 12 EJ_y/l^2.$$

Tak więc niespełnienie warunku statycznego zwiększa znacznie błąd rozwiązania przybliżonego (21% zamiast  $1,2/100$ ).

Rozpatrzmy z kolei pręt (rys. 15.3). Dobierając funkcję

$$w(x) = f [1 - \cos(\pi x/2l)],$$

spełniającą warunki kinematyczne ( $w_{x=0} = 0$ ,  $w'_{x=0} = 0$ ) i warunek statyczny  $(EJ_y w'')_{x=l} = 0$ , obliczamy jak zwykle z wzoru (15.5)

$$u_B = \frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 dx = \pi^2 f^2/16l.$$

Przy określeniu natomiast zmiany energii sprężystej  $\Delta U$  uwzględniamy poza energią zginania również energię odkształconej sprężyny, czyli  $Kw_B^2/2 = Kf^2/2$ , i wtedy

$$\Delta U = \int_0^l \frac{EJ_y}{2} (w'')^2 dx + \frac{Kf^2}{2} = \frac{\pi^4 EJ_y f^2}{64l^3} + \frac{Kf^2}{2}.$$

Z ogólnego warunku  $\Delta II = \Delta U - Pu_B = 0$  otrzymujemy wynik

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_y}{4l^2} \left( 1 + \frac{32 Kl^3}{\pi^4 EJ_y} \right), \quad (f)$$

który w zakresie wartości parametru  $\kappa = Kl^3/EJ_y < 10$  daje błąd w stosunku do rozwiązania ścisłego mniejszy od 2%.

### Zadania

1. Wyznaczyć siłę krytyczną dla przegubowo podpartego pręta  $AB$ , który na całej długości złączony jest z podłożem więzami sprężystymi (rys. 15.12). Sztywność więzów  $K \text{ N/m}^2$  jest reakcją ich na jednostkę długości pręta przy ugięciu  $w = 1 \text{ m}$ .

Rozwiązanie. Przyjmując linię ugięcia  $w = f \sin(n\pi x/l)$  spełniającą warunki kinematyczne i statyczne ( $n$  – liczba naturalna) obliczamy przesunięcie

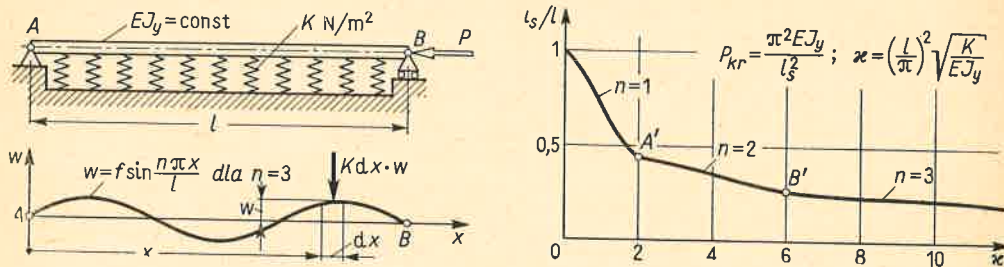
$$u_B = \pi^2 n^2 f^2 / 4l$$

oraz zmianę energii  $\Delta U$  złożoną z energii zginania

$$\int_0^l \frac{EJ_y}{2} (w'')^2 dx = \frac{n^4 \pi^4 EJ_y f^2}{4l^3}$$

oraz energii sprężystych więzów

$$\int_0^l \frac{(K dx) w^2}{2} = \frac{K}{2} \int_0^l f^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{Klf^2}{4}$$



Rys. 15.12. Wyboczenie pręta na sprężystym podłożu

Z warunku  $\Delta \Pi = \Delta U - Pu_B = 0$  otrzymujemy

$$P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_y}{l^2} + \frac{Kl^2}{n^2 \pi^2} = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} \left( n^2 + \frac{\kappa^2}{n^2} \right),$$

gdzie  $\kappa = (l^2/\pi^2) \sqrt{K/EJ_y}$  – charakteryzuje sztywność podłoża. Biorąc  $\kappa$  jako zmienną otrzymujemy dla różnej liczby półfal  $n$  wykres długości swobodnej  $l_s$ :

$$l_s = l \sqrt{n^2 + (\kappa/n)^2},$$

malejącej wraz ze wzrostem  $\kappa$ . Interesujące jest, że przy wzroście  $\kappa$  rośnie liczba  $n$  odpowiadająca najmniejszej sile krytycznej. Dla przykładu w przedziale  $A'B'$  jest  $n = 2$ , a gdy  $6 < \kappa < 12$ , wówczas  $n = 3$  itd. W punkcie  $B'$  wykresu obie postacie wyboczenia przy  $n = 2$  i  $n = 3$  są jednakowo możliwe.

Otrzymane powyżej rozwiązanie jest ścisłe.



Rys. 15.13. Do zadania 2

2. Wyznaczyć wartość krytyczną siłę  $P$  dla wspornikowego pręta (rys. 15.13). Przyjąć, że  $w(x) = f [1 - \cos(\pi x/2l)]$ .

$$\text{Odp. } P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_1}{4l^2} \frac{1}{(l_1/l) + (l_2/l)(J_1/J_2) - [(J_1 - J_2) \sin(\pi l_1/l) / \pi J_2]}$$

### 15.3. Wyboczenie pręta w zakresie sprężysto-plastycznym

Zagadnienia przedstawione w art. 15.1 i 15.2 rozwiązano zakładając, że materiał podlega prawu Hooke'a. Wyniki te są więc słuszne, gdy naprężenia normalne w chwili wyboczenia, tzw. *naprężenia krytyczne*, są mniejsze od granicy sprężystości<sup>(1)</sup>, czyli

$$|\sigma_{kr}| = |P_{kr}/A| < \sigma_{spr}. \tag{a}$$

Tak jak w art. 6.4 wprowadzamy i tu pojęcie smukłości  $\lambda_s$  danego pręta o swobodnej długości  $l_s$ :

$$\lambda_s = l_s/i_y, \tag{b}$$

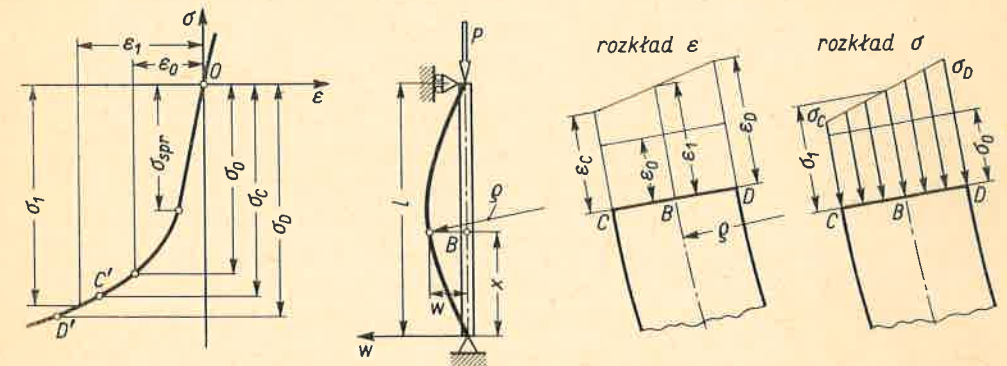
oraz smukłości granicznej  $\lambda_{gr}$ , jak we wzorze (6.18),

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{E/\sigma_{spr}}. \tag{c}$$

W wyniku tego nierówność (a), przy podstawieniu  $P_{kr}$  z wzoru (15.2), przyjmuje postać

$$\lambda_s > \lambda_{gr} = \pi \sqrt{E/\sigma_{spr}}. \tag{15.7}$$

Warunek ten oznacza, że rozwiązania otrzymane stosują się do prętów smukłych. Dla prętów bardziej krępych, gdy  $\lambda_s < \lambda_{gr}$ , a więc i  $|\sigma_{kr}| > |\sigma_{spr}|$ , analiza stateczności musi uwzględniać nieliniowość wykresu  $\sigma(\epsilon)$  (rys. 15.14). Następstwa tego przejawiają się nie



Rys. 15.14. Analiza wyboczenia pręta sprężysto-plastycznego

tylko w matematycznym opisie zagadnienia, lecz sięgają samego modelu zjawisk. W poprzednim bowiem ujęciu ustrojem statecznym był taki, który po usunięciu przyczyn powodujących wychylenie go ze stanu równowagi wracał samoistnie do pierwotnego położenia. Jest oczywiste, że w sytuacji obecnej wobec przekroczenia  $\sigma_{spr}$  i wystąpienia odkształceń plastycznych ustrój tej właściwości nie posiada. Z tego powodu dla pręta pracującego w zakresie sprężysto-plastycznym przyjmujemy taką siłę krytyczną, którą może on jeszcze przenieść przy małych jego wychyleniach od postaci prostej.

Niezmiernie istotny okazuje się fakt, że tak zdefiniowana wartość siły krytycznej zależy od sposobu przejścia do tej wychylonej postaci. W omawianych poprzednio ustrojach

<sup>(1)</sup> Ścisłej biorąc, należałoby wziąć, jak w art. 6.4, granicę proporcjonalności  $\sigma_{prop}$ , różnica ta jednak nie jest istotna.



sprężystych były wyraźnie dwie fazy, a mianowicie pierwotnej równowagi i dodatkowego wychylenia. W takim modelu zakładano więc, że te dwie czynności (obciążenia i wychylenia) *następują po sobie*. Możliwy jest jednak i inny model, a mianowicie gdy te dwie czynności są *jednoczesne*, tzn. że wzrostowi siły ściskającej pręt towarzyszy wzrost dodatkowego wychylenia<sup>(1)</sup>. To rozróżnienie sposobu postępowania nie ma znaczenia, dopóki materiał jest sprężysty, gdyż obydwa postępowania dają tę samą wartość  $P_{kr}$ . Inna jednak jest sytuacja w zakresie sprężysto-plastycznym, gdy nie obowiązuje zasada superpozycji (art. 14.1). Okazuje się, że mniejsza wartość  $P_{kr}$  odpowiada nie stosowanemu dotąd drugiemu schematowi.

Wykorzystując te uwagi rozpatrzmy ściskany pręt (rys. 15.14) zachowujący prostą postać, aż do wartości  $P = P_0$  bardzo bliskiej  $P_{kr}$ , przy czym zakładamy, że  $|\sigma_0| = P_0/A > |\sigma_{spr}|$ . Przy dalszym wzroście siły, gdy  $P = P_1 > P_0$ , zakładamy *jednoczesny wzrost wychylenia  $w(x)$  taki, że we wszystkich włóknach wyginającego się pręta następuje wzrost skrócenia  $\varepsilon$* . Dla przykładu, w obranym przekroju  $B$  skrócenia skrajnych włókien  $C, D$  rosną od wartości  $\varepsilon_0$ , gdy  $P = P_0$ , do wartości  $\varepsilon_C$  i  $\varepsilon_D$ , a odpowiadające im naprężenia określone są punktami  $C', D'$  wykresu  $\sigma(\varepsilon)$ . Jak podano w art. 14.2, wzdłuż wysokości przekroju rozkład  $\varepsilon$  jest liniowy. Liniowy jest też rozkład  $\sigma$ , albowiem ugięcie  $w(x)$  jest małe i odcinek  $C'D'$  wykresu  $\sigma(\varepsilon)$  można zastąpić prostą. W powyższym więc modelu

zjawisk pręt zachowuje się jak pręt sprężysty o module  $E_t$  równym lokalnemu nachyleniu wykresu  $\sigma(\varepsilon)$ , czyli

$$E_t = (d\sigma/d\varepsilon)_{\sigma=\sigma_1}, \quad (15.8)$$

gdzie  $\sigma_1$  — pewne naprężenie pośrednie między  $\sigma_C$  i  $\sigma_D$ .

Otrzymany obraz naprężeń można przedstawić jako sumę prostego ściskania i zginania (rys. 15.15). W pierwszym siła wzdłużna  $N = \sigma_1 A$  jest równa sile  $P_1$ , skąd wynika, że

$$\sigma_1 = P_1/A \quad (d)$$

jest we wszystkich przekrojach pręta jednako. Odpowiadający natomiast zginaniu moment gnący  $M_g$  jest różny, zależy bowiem od krzywizny  $1/\rho \approx w''(x)$ . Zależność ta

$$M = E_t J_y w'' \quad (e)$$

jest jak dla pręta sprężystego o module  $E = E_t$ . Z racji zależności (d) moduł ten jest ten sam dla wszystkich przekrojów.

Jeśli stan obciążenia siłą  $P_1$  jest stanem krytycznym ( $P_1 = P_{kr}$ ), to każdy element wygiętego pręta jest w równowadze. Dla pręta z rys. 15.14 oznacza to, że moment  $-P_1 w$

<sup>(1)</sup> Osobną kwestią jest sprecyzowanie tempa wzrostu wychylenia dodatkowego w stosunku do wzrostu siły ściskającej. Można na przykład zażądać, aby te dwa zjawiska były liniowo zależne. Można jednak przyjąć, że do pewnej wartości  $P_0$  siły ściskającej dodatkowe wychylenie jest równe zeru, a jednoczesny wzrost obu wielkości zaczyna się dopiero od tej wartości  $P_0$ .

od obciążenia równa się momentowi  $M$  z wzoru (e), czyli

$$E_t J_y w'' = -P_1 w = -P_{kr} w. \quad (f)$$

Rozwiązanie równania (f) przebiega jak w przypadku pręta sprężystego (zadanie 4 art. 15.1) i daje w wyniku

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E_t J_y}{l^2} \quad (15.9)$$

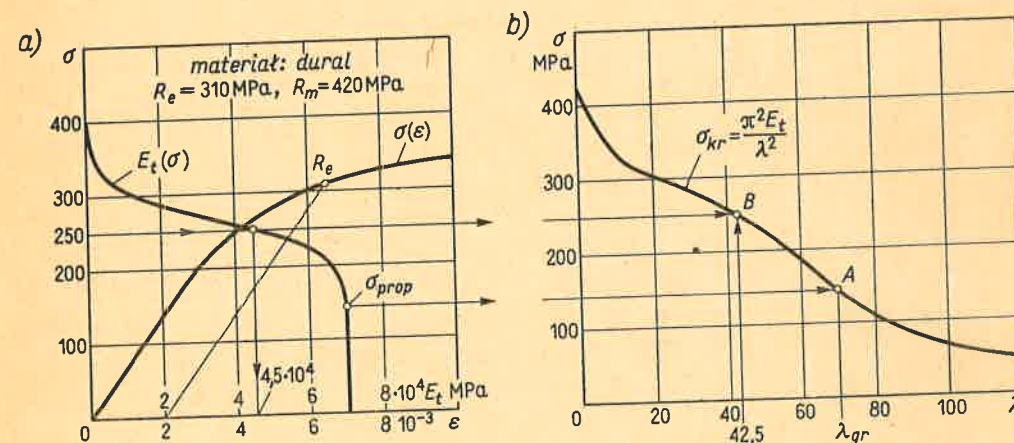
oraz naprężenie krytyczne

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda_y^2}, \quad (15.10)$$

gdzie  $\lambda_y = l/\sqrt{J_y/A}$  — smukłość odpowiadająca wyboczeniu w płaszczyźnie  $xz$ . Wykorzystując tę zależność możemy wyznaczyć przebieg  $\sigma_{kr}(\lambda)$ . W tym celu z wykresu  $\sigma(\varepsilon)$  określamy<sup>(1)</sup>  $E_t$  w funkcji  $\sigma$  (rys. 15.16a), a potem dla szeregu wartości  $\sigma^*$  obliczamy

$$\lambda_y = \pi \sqrt{E_t/\sigma^*}, \quad (15.11)$$

czyli takie smukłości, dla których obrane wartości  $\sigma^*$  są naprężeniami krytycznymi. Dla przykładu, gdy  $\sigma^* = 250$  MPa, wówczas z wykresu (rys. 15.16a) mamy  $E_t = 4,5 \cdot 10^4$  MPa i wtedy z (15.11) obliczamy  $\lambda_y = 42,5$ , otrzymując w ten sposób punkt  $B$  wykresu  $\sigma_{kr}$  (rys. 15.16b).



Rys. 15.16. Określenie  $\sigma_{kr}$  w przedziale średnich i małych smukłości

Przeprowadzone rozważania są potwierdzone licznymi doświadczeniami wykazującymi dobrą zgodność wyników. Za użyciem przedstawionego tu modelu przemawia i to, że nierozdzielność zjawisk obciążania i wyginania się ułatwiona jest istnieniem nieuniknionych w praktyce odchyżeń pręta od idealnie prostej postaci.

Opisany sposób postępowania można uogólnić i na inne przypadki podparcia pręta,

<sup>(1)</sup> Na ogół zamiast wykresu ściskania bierzemy łatwiejszy do wyznaczenia w laboratorium wykres rozciągania. Wartość  $E_t$  wyznaczamy wykreślnie.



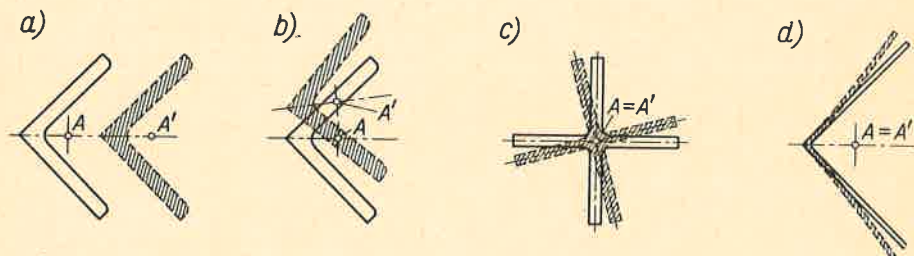
jak na rys. 6.24. W wyniku tego otrzymuje się identyczne wartości  $P_{kr}$  jak w zakresie sprężystym, z tym że zamiast modułu  $E$  bierze się wartość  $E_t$ . Reguła ta jest słuszna, gdy pręt jest przyzmatyczny, a siła wzdłużna stała na całej długości pręta, nie jest natomiast słuszna w przypadku jak na rys. 15.13, w którym naprężenia ściskające są różne na odcinkach  $l_1$  i  $l_2$ . To samo dotyczy ustroju z rys. 15.3, w którym pomimo przekroczenia  $\sigma_{spr}$  w przecie sztywność sprężyny  $K$  nie zmienia się. Takie bardziej złożone zagadnienia wykraczają poza ramy kursu wytrzymałości materiałów.

W szeregu zagadnień, gdy nie znamy wykresu  $\sigma(\epsilon)$ , dobre przybliżenie do rzeczywistości daje w zakresie średnich smukłości ( $20 < \lambda < 60$ ) omówiona w art. 6.4 parabola Johnsona.

## 15.4. Przegląd zagadnień stateczności ustrojów

Badane dotąd zagadnienia stateczności ustrojów należą do tzw. *klasycznych*, których celem jest określenie obciążeń krytycznych przy założeniu małych wychyleń ustroju z położenia pierwotnej równowagi. Stosując ten model i ogólne metody postępowania opisane w art. 15.1÷15.3 rozwiązano mnóstwo technicznie ważnych zagadnień omówionych szczegółowo w obszernych monografiach poświęconych tej dziedzinie<sup>(1)</sup>. Te klasyczne zagadnienia można podzielić według rodzaju konstrukcji (pręt, płyta, powłoka) i rodzaju obciążenia (ściskanie, skręcanie itp.).

W zakresie konstrukcji prętowych z elementami ściskanymi rozróżniamy zagadnienia obciążeń krytycznych dla pojedynczego pręta i dla zespołu prętów (rama, kratownica itp.). W pierwszym przypadku, jak uczy doświadczenie, utrata stateczności może mieć jedną z trzech następujących postaci: wyboczenia giętnego, giętno-skrętnego i wreszcie lokalnego (rys. 15.17). W pierwszym z nich, omawianym dotychczas, pierwotnie prosta oś pręta



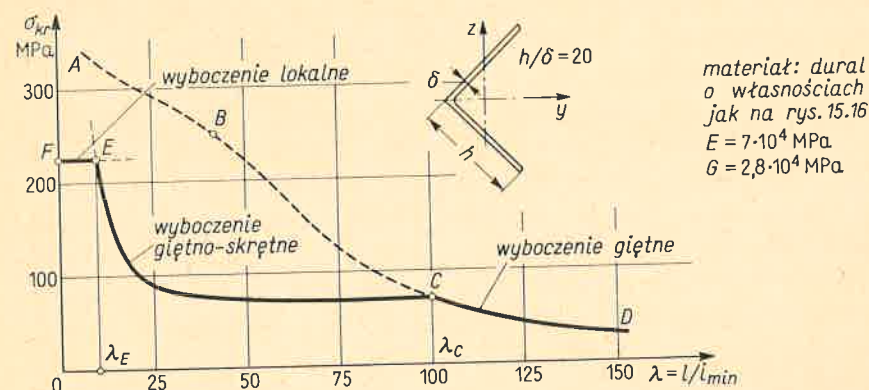
Rys. 15.17. Przemieszczenia przekroju ściskanego pręta przy różnych formach utraty stateczności  
Pierwotne położenie przekroju narysowano linią ciągłą.

ulega zakrzywieniu, a poprzeczny przekrój ulega przesunięciu (rys. 15.17a). Przy wyboczeniu giętno-skrętnym (rys. 15.17b) zakrzywieniu osi i przesunięciu przekroju towarzyszy jego obrót. Szczególnym przypadkiem wyboczenia giętno-skrętnego jest wyboczenie skrętne (rys. 15.17c), przy którym oś pręta zostaje prosta, a przekrój ulega jedynie obrotowi.

<sup>(1)</sup> Patrz na przykład: S. Timoshenko i J. Gere, *Teoria stateczności sprężystej*, Warszawa 1963, Arkady; A. Wolmir, *Ustojcziwost' dieformirujemych sistem*, Moskwa 1967.

Wreszcie wyboczenie lokalne polega na tym, że w odróżnieniu od poprzednich postaci, przekrój poprzeczny deformuje się, przy czym naroża jego nie przesuwają się (rys. 15.17d).

Jak pokazuje analiza rachunkowa i doświadczenie, dla ściskanego pręta o przekroju zwartym bądź rurowym cienkościennym najmniejsze obciążenie krytyczne odpowiada wyboczeniu giętnemu. Inaczej jest jednak w przypadku cienkościennych profili otwartych, dla których zależnie od smukłości  $\lambda$  mogą występować wszystkie podane powyżej postaci wyboczenia. Dla duralowego na przykład kątownika (rys. 15.18), gdy  $\lambda > \lambda_c$ , wyboczenie

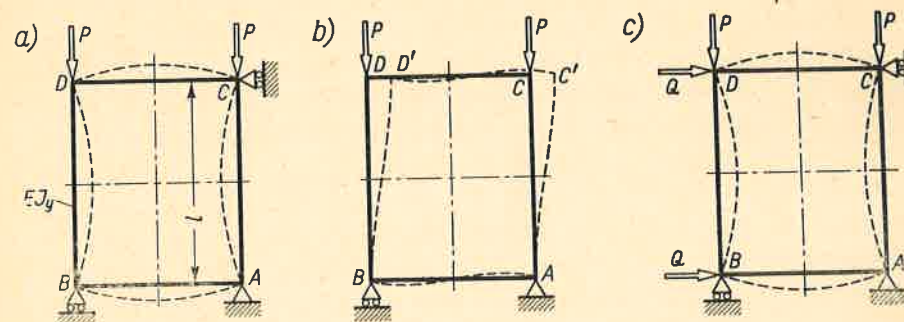


materiał: dural  
o własnościach  
jak na rys. 15.16  
 $E = 7 \cdot 10^4$  MPa  
 $G = 2,8 \cdot 10^4$  MPa

Rys. 15.18. Typowy wykres  $\sigma_{kr}(\lambda)$  dla cienkościennego profilu otwartego

giętne daje najniższe naprężenie krytyczne, gdy jednak  $\lambda_E < \lambda < \lambda_c$ , utrata stateczności ma postać wyboczenia giętno-skrętnego i wreszcie gdy  $\lambda < \lambda_E$ , decyduje wyboczenie lokalne. W wyniku zależności  $\sigma_{kr}(\lambda)$  przedstawia się linią FECD, zamiast ABCD, jakby można sądzić badając jedynie wyboczenie giętne.

Jest faktem, że pojedynczy pręt stanowi z reguły element bardziej złożonego ustroju. Powstaje więc pytanie, w jakim stopniu analiza stateczności danego pręta jest miarodajna dla oceny stateczności całego ustroju. Aby to wyjaśnić, rozpatrzmy podwójnie symetryczną prostokątną ramę (rys. 15.19a), w której siły  $P$  mogą wyboczyć pręty  $AC$  i  $BD$ , jak podaje rysunek. Gdy poziome nie pracujące pręty  $CD$  i  $AB$  są bardzo wiotkie na zginanie, wówczas warunki pracy prętów pionowych są praktycznie takie, jakby były one zakończone prze-



Rys. 15.19. Jakościowa analiza wyboczenia ustroju (ramy)



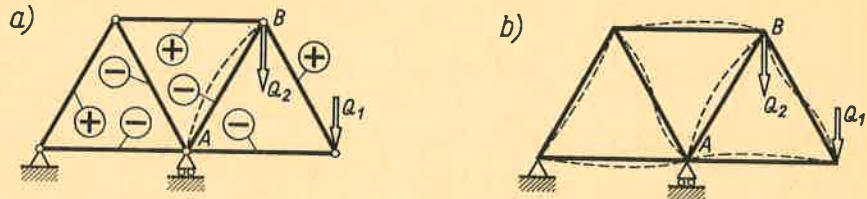
gubami. Jeśli poziome pręty są bardzo sztywne, to pręty pionowe zachowują się jak utwierdzone na końcach. Odpowiadające tym skrajnościom krytyczne wartości  $P$ , przy założeniu, że wyoboczenie jest giętkie, są według rys. 6.24

$$P'_{kr} = \pi^2 EJ_y/l^2, \quad P''_{kr} = 4\pi^2 EJ_y/l^2. \quad (a)$$

Przy skończonej sztywności prętów poziomych wartość  $P_{kr}$  będzie między tymi wartościami skrajnymi. Jak widać, znajomość obciążeń krytycznych pojedynczego pręta pozwala określić tu przedział wartości  $P_{kr}$  ustroju. W niektórych zagadnieniach takie oszacowanie  $P_{kr}$ , zwłaszcza od dołu, może być całkowicie wystarczające dla potrzeb technicznych.

Podany sposób oceny  $P_{kr}$  nie zawsze jest możliwy. Jeśli bowiem w badanej ramie usunąć nieczynną statycznie podporę  $C$  i przyjąć, że pręty  $CD$  i  $AB$  są mało sztywne na zginanie, to postać utraty stateczności może być inna (rys. 15.19b), a siła  $P_{kr}^*$  znacznie mniejsza od  $P'_{kr}$ . W takim przypadku zachodzi potrzeba badania stateczności całego ustroju. Podobna sytuacja istnieje, gdy obciążenie ramy stanowią siły  $P$  i  $Q$  (rys. 15.19c) i opisane poprzednio stabilizujące działanie prętów poziomych na pręty pionowe jest zmniejszone istnieniem sił  $Q$ .

Podobne subtelnosci i komplikacje występują w analizie stateczności kratownic. Gdyby pręty takiej kratownicy były rzeczywiście połączone przegubowo (rys. 15.20a),

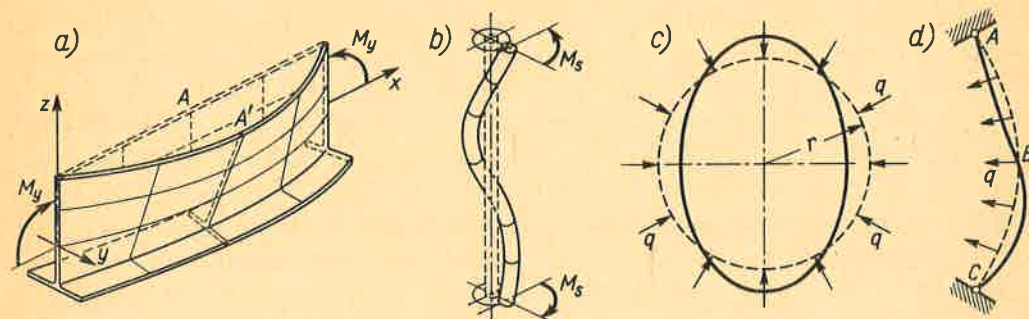


Rys. 15.20. Różnica obrazów odkształceń kratownicy z węzłami przegubowymi i sztywnymi

zjawiska utraty stateczności w poszczególnych prętach byłyby niezależne, a wartość obciążenia  $Q_1$  i  $Q_2$  byłaby limitowana osiągnięciem stanu krytycznego w najsłabszym przecię, na przykład  $AB$ . W rzeczywistości węzły kratownicy są sztywne i wyoboczeniu pręta  $AB$  towarzyszy odkształcenie pozostałych prętów blokujących obrót jego końców. Podobnie jak w przypadku ram, to blokowanie zależy nie tylko od sztywności pozostałych prętów, lecz i od działających w nich sił wzdłużnych. W takim ujęciu określenie krytycznych dla ustroju obciążeń  $Q_1$  i  $Q_2$  jest zadaniem trudnym i rzadko kiedy można je rozwiązać ściśle. Z tych powodów utarło się, że w praktycznych obliczeniach tę współzależność odkształceń pomijamy i traktujemy każdy pręt kratownicy jako zakończony przegubowo. W kratownicach płaskich takie postępowanie zwiększa na ogół zapas bezpieczeństwa, gdyż rzeczywiste siły krytyczne mogą być do 40% większe.

Poza opisanymi jakościowo przypadkami wyoboczenia pręta bądź ustrojów prętowych spotykamy zjawiska utraty stateczności przy innych obciążeniach. Jednym z nich jest tzw. zwichrzenie zginanej, cienkościennej belki o przekroju otwartym (rys. 15.21a), przy którym następuje przemieszczenie się przekrojów prostopadle do płaszczyzny działania momentu gnącego z jednoczesnym ich obrotem względem osi podłużnej. Innym przypadkiem, mającym praktyczne znaczenie w wiertnictwie, jest utrata stateczności pręta

przy skręcaniu (rys. 15.21b), przy której pierwotnie prosty pręt przyjmuje postać linii śrubowej. Wreszcie zjawisko utraty stateczności występuje w pierścieniach i prętach zakrzywionych (rys. 15.21c,d), ściskanych sprężynach śrubowych i wielu innych. W szczególności duże znaczenie mają zagadnienia stateczności elementów cienkościennych jak



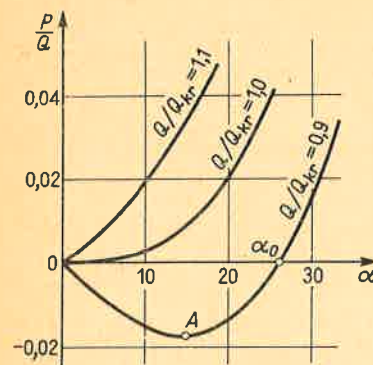
Rys. 15.21. Przykłady różnych form utraty stateczności

plyty i powłoki oraz złożonych z nich ustrojów. Zasygnalizowanie tych kwestii jest o tyle niezbędne, że jak wiemy z art. 6.5, zjawisko utraty stateczności jest dodatkowym czynnikiem limitującym bezpieczeństwo konstrukcji.

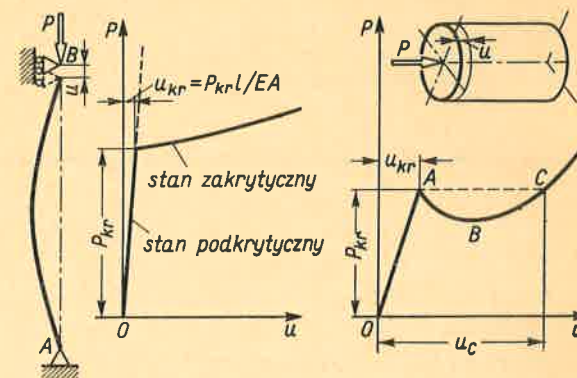
Założenie małych wychyleń przy badaniu stateczności daje, jak wyjaśniono w zakończeniu art. 15.1, pewne niekonsekwencje w opisie zjawisk przy obciążeniach większych od krytycznych. Właściwą odpowiedź daje badanie stateczności w zakresie dużych wychyleń. Dla przykładu zbadajmy jeszcze raz ustrój (rys. 15.1) zakładając, że kąt  $\alpha$  nie jest mały. Wypadkowa siła

$$P = Q \sin \alpha - [K(R+r) \sin 2\alpha/2] \quad (b)$$

ma dla kilku wybranych wartości  $Q$  przebieg według rys. 15.22. I tak gdy  $Q = 0,9 K(R+r) = 0,9 Q_{kr}$ , wówczas dla małych kątów  $\alpha$  mamy  $P < 0$ , a więc układ jest stateczny. Jeśli jednak przez przyłożenie poziomej siły przełamać barierę odpowiadającą punktowi  $A$ ,



Rys. 15.22. Wykresy  $P(\alpha)$  dla ustroju z rys. 15.1



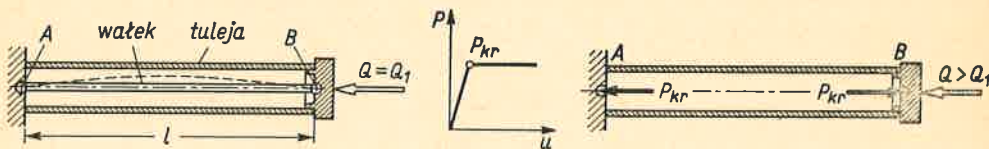
Rys. 15.23. Charakterystyki ustrojów w zakresie pod i zakrytycznym



to układ może mieć drugie położenie równowagi przy  $\alpha = \alpha_0$ , dla którego  $\cos \alpha_0 = 0,9$ . Łatwo zauważyć, że to drugie położenie jest nietrwale, albowiem przy niewielkim wychyleniu pojawia się siła  $P$  powiększająca to wychylenie bądź w kierunku powrotu do  $\alpha = 0$ , bądź w kierunku wzrostu  $\alpha$ . Gdy  $Q = 1,1 Q_{kr}$ , wówczas zawsze jest  $P > 0$ , a więc układ jest niestateczny. Dla  $Q = Q_{kr}$  i bardzo małych kątów  $\alpha$ , siła  $P$  jest z dokładnością do małych drugiego rzędu równa zeru i równowaga jest obojętna. Dla większych natomiast wartości  $\alpha$  mamy  $P > 0$  i niestateczność układu. Tak więc własności układu przy dużych odkształceniach mogą być odmienne niż w zakresie małych odkształceń.

Podobną sytuację obserwujemy w przypadku ustrojów jak pręty, płyty, powłoki. Charakterystyka ustroju  $P(u)$  ma tu z reguły postać jak na rys. 15.23. W pierwszej z nich, odpowiadającej na ogół konstrukcjom prętowym i płytom, po przekroczeniu  $P_{kr}$  mamy w stanie zakrytycznym pochodną  $dP/du > 0$ . W takim przypadku pomimo raptownego spadku sztywności przejście w stan zakrytyczny odbywa się łagodnie. Inaczej zachowują się ustroje, w szczególności powłoki, w których po osiągnięciu stanu krytycznego występuje przeskok odkształceń z  $u_{kr}$  na  $u_c$ . Występujące przy tym zjawiska dynamiczne powodują często trwałe odkształcenia, a więc w pewnym sensie zniszczenie konstrukcji. W takim przypadku w analizie stateczności należy uwzględnić duże odkształcenia, co prowadzi do nieliniowych zależności różniczkowych. Na skutek tego rozwiązanie tych zagadnień tzw. *nieklasycznych* natrafia na duże trudności.

W odróżnieniu od konstrukcji statycznie wyznaczalnych, w których utrata stateczności jednego elementu powoduje zniszczenie całości, ustroje statycznie niewyznaczalne (prętowe i cienkościenne) mogą pracować nienagannie nawet wtedy, gdy niektóre elementy utracą stateczność. *Warunkiem dopuszczalności takiego stanu pracy jest skrepowanie (ograniczenie) przez inne elementy ustroju odkształceń elementu tracącego stateczność.* Tego warunku nie spełnia na przykład rama (rys. 15.19), w której po wyboczeniu przesunięcia pionowe punktów  $C$  i  $D$  nie są niczym ograniczone. Dla takiego więc ustroju statycznie niewyznaczalnego osiągnięcie stanu krytycznego oznacza jego zniszczenie. Inna jest sytuacja w ustroju (rys. 15.24), gdzie wyboczenie smukłego wałka  $AB$  przy  $Q = Q_1$  nie daje swobody prze-



Rys. 15.24. Dopuszczalność pracy ustroju po częściowej utracie stateczności

sunięć głowicy  $B$  opierającej się na krępej tulei. Z kolei skrócenie tulei jest małe, a więc wygięcie się wybozonego wałka jest też małe i całkowite naprężenia w nim mogą być w granicach sprężystości. Ponieważ w wyboczonym wałku siła wzdłużna jest praktycznie stała i niezależna od zbliżenia się jego końców<sup>(1)</sup>, dalsza praca ustroju odbywa się tak, jak gdyby na głowicę działała poza siłą  $Q > Q_1$  stała siła  $P_{kr}$ . Zniszczenie tak zmodyfiko-

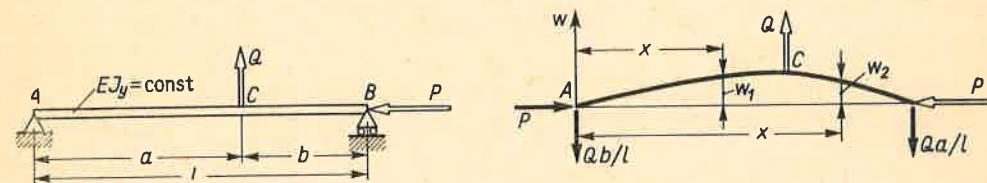
<sup>(1)</sup> Patrz rys. 15.23. Gdy  $P > P_{kr}$ , wówczas  $dP/du$  jest tak małe, że można przyjąć  $P = P_{kr} = \text{const}$ .

wanego ustroju statycznie wyznaczalnego nastąpi, gdy wyboczeniu ulegnie tuleja. Podobny obraz zjawisk występuje w kratownicach statycznie niewyznaczalnych, żebrowanych konstrukcjach cienkościennych i innych. Uwzględnienie tego w obliczeniach znajduje coraz szersze zastosowanie, gdyż pozwala na bardziej ekonomiczne konstruowanie.

## 15.5. Jednoczesne zginanie i ściskanie

Osobną grupę zagadnień stanowi łączne działanie kilku obciążeń, z których co najmniej jedno może, niezależnie od pozostałych, wywołać utratę stateczności ustroju. Powoduje to sprzężenie efektów działania tych obciążeń w tym sensie, że obecność jednego obciążenia wpływa na skutek działania pozostałych obciążeń. W takim przypadku nie obowiązuje na ogół zasada superpozycji.

Przykładem, do którego ograniczymy się dla zilustrowania tych zjawisk, będzie działanie poprzecznej siły  $Q$  na belkę ścisną siłą  $P$  (rys. 15.25). W odróżnieniu od przypadku



Rys. 15.25. Jednoczesne zginanie i ściskanie belki pryzmatycznej

mimośrodowego ściskania (art. 6.3) traktujemy, że siły  $P$  i  $Q$  są od siebie niezależne<sup>(1)</sup>. Z przyczyn podanych poprzednio badamy równowagę belki w stanie odkształconym, otrzymując dla momentu gnącego w przedziałach  $AC$  i  $CB$  zależności

$$M_g = -\frac{Qb}{l}x - Pw_1, \quad 0 \leq x \leq a; \quad M_g = -\frac{Qa}{l}(l-x) - Pw_2, \quad a \leq x \leq l.$$

Jak wyjaśniono w art. 15.1, równowaga każdego elementu belki jest zachowana, gdy te momenty są równe odpowiednio momentom  $EJ_y w_1''$  i  $EJ_y w_2''$  wynikającym z ugięcia belki, skąd mamy

$$EJ_y w_1'' + Pw_1 = -\frac{Qb}{l}x, \quad EJ_y w_2'' + Pw_2 = -\frac{Qa(l-x)}{l}. \quad (a)$$

Równania te są słuszne odpowiednio w przedziałach  $AC$  i  $CB$ . Ich rozwiązanie ma postać

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= A_1 \sin kx + B_1 \cos kx - (Qbx/Pl), & \text{dla } 0 \leq x \leq a, \\ w_2 &= A_2 \sin kx + B_2 \cos kx - Qa(l-x)/Pl, & \text{dla } a \leq x \leq l, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

gdzie  $k = \sqrt{P/EJ_y}$ . Stałe całkowania  $A_1, \dots, B_2$  wyznaczamy, jak w zadaniu art. 5.8, z warunków podparcia belki i warunków ciągłości linii ugięcia w punkcie  $C$ , czyli

$$(w_1)_{x=0} = 0, \quad (w_2)_{x=l} = 0, \quad (w_1)_{x=a} = (w_2)_{x=a}, \quad (w_1')_{x=a} = (w_2')_{x=a}.$$

<sup>(1)</sup> W artykule 6.3 moment zginający  $Pe_z$  jest zależny od siły  $P$ .



W wyniku otrzymujemy wartości stałych

$$A_1 = Q \sin kb / Pk \sin kl, \quad B_1 = 0, \quad A_2 = -Q \sin ka / Pk \operatorname{tg} kl, \quad B_2 = Q \sin ka / Pk.$$

Po podstawieniu tych stałych do równań (b) mamy

$$w_1 = \frac{Qb}{P} \left( \frac{\sin kb}{kb} \frac{\sin kx}{\sin kl} - \frac{x}{l} \right), \quad w_2 = \frac{Qa}{P} \left[ \frac{\sin ka}{ka} \frac{\sin k(l-x)}{\sin kl} - \frac{l-x}{l} \right] \quad (c)$$

oraz momenty gnące odpowiednio w przedziałach AC i CB

$$M_a = EJ_y w_1' = -Qb \frac{\sin kb \sin kx}{kb \sin kl}, \quad M_a = EJ_y w_2' = -Qa \frac{\sin ka \sin k(l-x)}{ka \sin kl}. \quad (d)$$

Z wzorów (c) i (d) wynika, że gdy  $\sin kl \rightarrow 0$ , czyli gdy  $kl \rightarrow \pi$ , wówczas ugięcia i momenty gnące stają się bardzo duże. Granicznej wartości  $kl = \pi$  odpowiada wartość siły

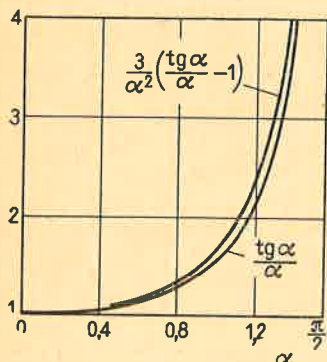
$$P = \pi^2 EJ_y / l^2$$

identyczna z otrzymaną przy badaniu stateczności siłą krytyczną. Tak więc działanie obciążenia poprzecznego nie zmienia wartości obciążenia krytycznego. Reguła ta obowiązuje i w innych przypadkach obciążenia i podparcia pręta, z tym że wartość  $P_{kr}$  zależy od sposobu tego podparcia.

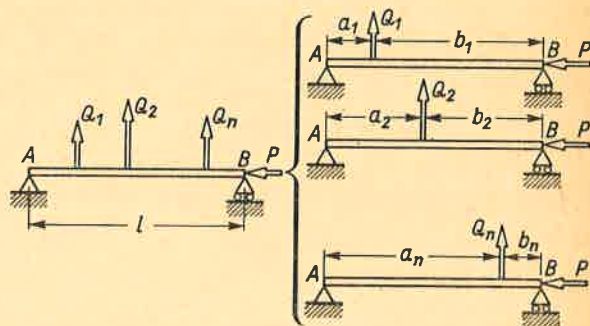
W szczególnym przypadku, gdy siła  $Q$  działa po środku ( $a = b = l/2$ ), ugięcie  $w$  staje się symetryczne. Maksymalne ugięcie (strzałka) i maksymalny moment gnący są w środku i wynoszą

$$f = w_{\max} = \frac{Ql^3}{48EJ_y} \left[ \frac{3}{\alpha^2} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} - 1 \right) \right], \quad (M_g)_{\max} = -\frac{Ql}{4} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}, \quad (e)$$

gdzie  $\alpha = kl/2 = (l/2) \sqrt{P/EJ_y}$ . Pierwsze czynniki wyrażeń (e) odpowiadają działaniu samej tylko siły  $Q$ , pozostałe przedstawiają korektę wywołaną istnieniem siły  $P$ , a ich przebieg w funkcji parametru  $\alpha$  podaje rys. 15.26. Widać, że w miarę zbliżania się siły  $P$  do wartości  $P_{kr}$  czynniki te szybko rosną.



Rys. 15.26. Czynniki korygujące we wzorach (e)



Rys. 15.27. Rozkład złożonego obciążenia poprzecznego

Otrzymane rozwiązanie można zastosować, gdy na belkę działa szereg sił  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  (rys. 15.27). Rozkładając to obciążenie w sposób podany na rysunku otrzymujemy za

każdym razem powtórzenie zadania z rys. 15.25, którego rozwiązanie stanowią liniowe równania (a). Z tego ostatniego faktu wynika, że skutek łącznego działania obciążeń  $Q$  jest sumą rozwiązań składowych, o ile tylko każde z nich określone jest przy jednoczesnym działaniu tej samej siły ściskającej  $P$ .

Dla bardziej złożonych obciążeń, gdy siła  $Q$  jest więcej niż trzy, podany sposób rozwiązania nasuwa trudności rachunkowe i wtedy posługujemy się rozwiązaniem przybliżonym. Zauważmy mianowicie, że przy ogólnym obciążeniu różniczkowe równanie równowagi ma postać

$$EJ_y w'' = M_Q - Pw \quad \text{lub} \quad EJ_y w'' + Pw = M_Q, \quad (f)$$

gdzie  $M_Q$  — moment gnący odpowiadający działaniu samego tylko obciążenia poprzecznego. Gdy pominąć wpływ siły  $P$ , wówczas rozwiązanie równania

$$EJ_y \bar{w}'' = M_Q$$

jest takie, jak podano w art. 5.8. Podstawiając powyższe wyrażenie do równania (f) mamy więc

$$EJ_y w'' + Pw = EJ_y \bar{w}'' \quad (g)$$

Istotą metody przybliżonej jest założenie, że ugięcia  $w$  i  $\bar{w}$  można przedstawić tą samą funkcją  $x$ , a mianowicie

$$w = f \sin(\pi x/l), \quad \bar{w} = f_Q \sin(\pi x/l), \quad (h)$$

gdzie  $f_Q$  — ugięcie w środku belki wywołane danym obciążeniem poprzecznym. Wstawiając wyrażenia (h) do (g) mamy

$$f = \frac{f_Q}{1 - (P/P_{kr})}, \quad (15.12)$$

jako szukaną strzałkę ugięcia przy łącznym działaniu obciążenia poprzecznego i siły wzdłużnej, przy czym  $P_{kr} = \pi^2 EJ_y / l^2$ . Odpowiadający temu moment gnący jest

$$M_g = M_Q - Pw = M_Q - Pf \sin(\pi x/l). \quad (15.13)$$

W niektórych przypadkach zadowolamy się bardziej zgrubną oceną momentu  $M_g$  przyjmując, że zależność jego od  $M_Q$  jest taka sama jak zależność  $f$  od  $f_Q$ , czyli

$$M_g = M_Q [1 - (P/P_{kr})]. \quad (15.14)$$

Zależności (15.12)–(15.14) stosujemy i w innych przypadkach podparcia pręta, z tym że wartość  $P_{kr}$  wstawiamy tę, która odpowiada danemu sposobowi podparcia. Wartości  $f_Q$  i  $f$  traktujemy w tych zależnościach jako algebraiczne.

### Zadania

1. Wyznaczyć ugięcie i moment gnący w środku belki (rys. 15.27) obciążonej siłą  $P = 0,81P_{kr}$  oraz siłami  $Q_1 = Q_2 = Q$ , gdy  $a_1 = b_2 = l/4$ .

Rozwiązanie. Parametr  $k = \sqrt{P/EJ_y} = \sqrt{(P/P_{kr})(P_{kr}/EJ_y)} = (\pi/l) \sqrt{P/P_{kr}}$ , skąd  $kl = 0,9\pi$  rad =  $= 162^\circ$ . Z wzorów (c) i (d) dla siły  $Q_2 = Q$ ,  $b = l/4$ ,  $x = l/2$  i  $P = 0,81\pi^2 EJ_y / l^2$  otrzymujemy

$$w_1 = \frac{Ql^3}{4 \cdot 0,81 \pi^2 EJ_y} \left( \frac{\sin 40,5^\circ}{0,225 \pi} \frac{\sin 81^\circ}{\sin 162^\circ} - \frac{1}{2} \right) = \frac{Ql^3}{13,18 EJ_y}, \quad M_1 = -0,732 Ql.$$



Działanie symetrycznie położonej siły  $Q_1$  ( $a = l/4$ ) daje te same wyniki, wobec czego wypadkowe ugięcie  $w$  i moment  $M_g$

$$w = 2w_1 = Ql^2/6,59EJ_y, \quad M_g = 2M_1 = -1,464Ql.$$

Wartości  $w > 0$  i  $M_g < 0$  odpowiadają zwrotom sił  $P$  i  $Q$  jak na rysunku. Widać duży wpływ siły ściskającej, np. prawie sześciokrotny wzrost  $M_g$  w porównaniu z  $M_Q = -Ql/4$ .

2. Ocenic dokładność zależności (15.12) ÷ (15.14) dla danych jak w zadaniu 1.

Odp. Obliczając ugięcie  $f_0$ , jak podano w art. 9.3, mamy  $f_0 = 11Ql^3/384EJ_y$ , a ponadto  $M_Q = -Ql/4$ . Z wzorów (15.12) i (15.13) przy  $P = 0,81P_{kr} = 0,81\pi^2EJ_y/l^2$  otrzymujemy

$$f = Ql^3/6,63EJ_y, \quad (M_g)_{x=l/2} = -1,453Ql.$$

Widać, że odchyłki od wartości ścisłych są poniżej 1%. Gorszą dokładność (błąd około 10%) daje wzór (15.14), z którego  $M_g = -1,312Ql$ .

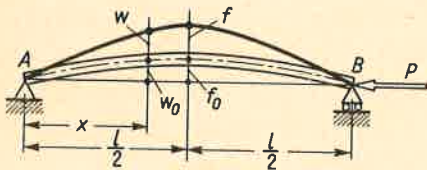
3. Naturalna postać bardzo lekko zakrzywionego pręta opisana jest zależnością  $w_0 = f_0 \sin(\pi x/l)$ , gdzie strzałka naturalna  $f_0$  jest mała, np.  $f_0 = 0,01l$ . Wyznaczyć ugięcie  $w(x)$  przy ściskaniu pręta siłą  $P$  (rys. 15.28).

Odp. Wstawiając moment gnący  $M_g = -P(w + w_0)$  do równania równowagi  $EJ_y w'' = M_g$  otrzymujemy rozwiązanie

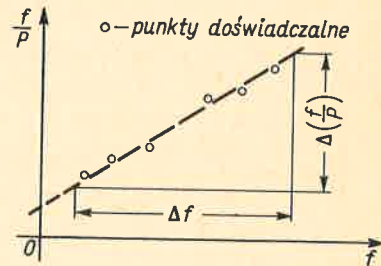
$$w(x) = f \sin(\pi x/l),$$

gdzie strzałka  $f$  ugięcie  $w(x)$  jest

$$f = \frac{Pf_0}{P_{kr} - P} = \frac{f_0}{(P_{kr}/P) - 1}. \quad (15.15)$$



Rys. 15.28. Badanie pręta wstępnie zakrzywionego



Rys. 15.29. Doświadczalne określenie  $P_{kr} = \Delta f / \Delta(f/P)$

Różnica w porównaniu z (15.12) wynika stąd, że obecnie ta sama siła  $P$  powoduje i ściskanie, i zginanie, podczas gdy poprzednio obciążenie poprzeczne było od siły  $P$  niezależne.

Wynik (15.15) uogólniamy na inne przypadki podparcia pręta wstawiając odpowiednią dla tego podparcia wartość  $P_{kr}$ . Wzór ten wykorzystujemy w badaniach laboratoryjnych do określenia  $P_{kr}$ . Mierzac mianowicie szereg odpowiadających sobie wartości  $P$  i  $f$  nanosimy je w układzie współrzędnych  $(f/P)$  i  $f$  (rys. 15.29). Przez otrzymane w ten sposób punkty prowadzimy prostą, której nachylenie daje wartość  $P_{kr}$ , albowiem z (15.15)

$$P_{kr}(f/P) - f = f_0 = \text{const.}$$

## CZĘŚĆ SZÓSTA

# Działanie obciążeń zmiennych

## 16

## REAKCJA USTROJU NA OBCIĄŻENIA ZMIENNE

W większości zagadnień budowy maszyn obciążenia ustroju są zmiennie w czasie. Gdy zmiany te są powolne, np. zmiana ciśnienia w kotle, wówczas proces uważamy za quasi-statyczny i do określenia naprężeń stosujemy wszystkie nabyte już wiadomości. Inna jest sytuacja, gdy obciążenia i wywołane nimi przemieszczenia występują, wywołane przyspieszeniami, wzajemne oddziaływania między elementami ustroju. Przy podziale ustroju na elementy te oddziaływania stają się dodatkowymi obciążeniami. Ich wartość może być o jeden lub dwa rzędy wielkości większa, niż odpowiadająca statycznemu działaniu obciążenia zewnętrznego. Tak więc przy działaniu obciążeń zmiennych może istnieć zasadnicza różnica między reakcją ustroju a wielkością obciążeń zewnętrznych i na ten fakt należy zwrócić szczególną uwagę.

Miarę, którą oceniamy szybkość zmian obciążenia, daje zachowanie się ustroju, który po wychyleniu go z położenia naturalnego zostaje zostawiony sam sobie. Ustrój taki, jak wiemy z codziennej obserwacji, wykonuje ruch okresowy, którego postać zależy od rozłożenia mas i własności sprężystych ustroju. W najprostszym przypadku taki ruch okresowy, tzw. *drgania swobodne*, ma jedną tylko postać o tzw. *częstości własnej*  $\nu_n \text{ s}^{-1}$ . Odpowiadający jej *okres drgań własnych*  $T_n$  wynosi

$$T_n = 1/\nu_n \text{ s.} \quad (16.1)$$

W technice zamiast częstości  $\nu_n$  stosujemy na ogół tzw. *częstość kołową*, czyli pulsację  $\omega_n$  określoną jako

$$\omega_n = 2\pi\nu_n = 2\pi/T_n \text{ rad/s} \quad (16.2)$$

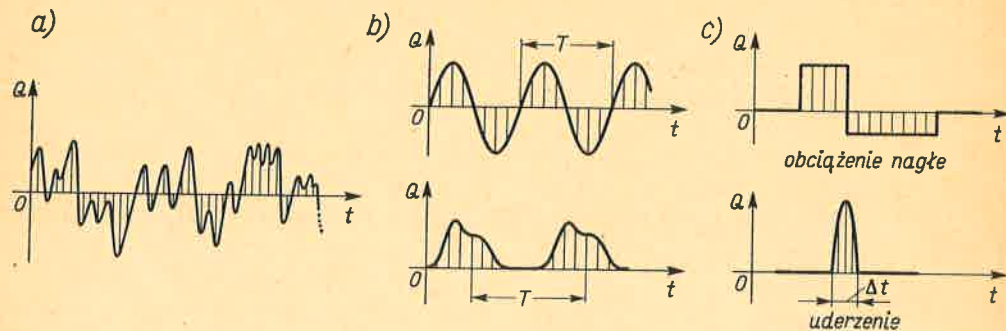
i przedstawiającą liczbę drgań w czasie  $2\pi$  sekund.

Ogólnie biorąc obciążenie zmiennie  $Q$  jest nieregularną funkcją czasu  $t$  (rys. 16.1a).



Takie obciążenie, występujące zwłaszcza w urządzeniach transportowych (samochody, wagony, okręty itp.), nazywamy *przypadkowym*. Gdy przebieg  $Q(t)$  powtarza się co okres  $T$ , tzw. *okres wymuszenia*, obciążenie nazywamy *okresowym* (rys. 16.1b), a odpowiadające mu częstość  $\nu$  i pulsację  $\omega$ ,

$$\nu = 1/T, \quad \omega = 2\pi\nu,$$

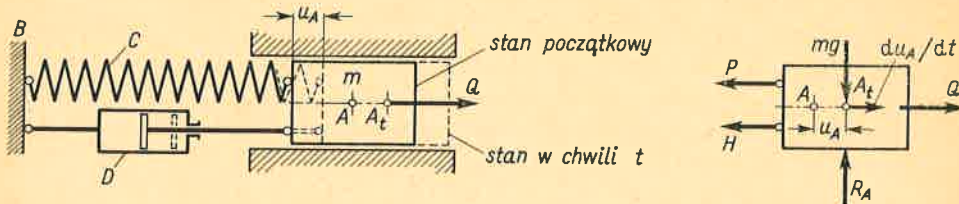


Rys. 16.1. Charakter obciążeń zmiennych

nazywamy *wymuszającymi*. Wreszcie gdy przebieg  $Q(t)$  wykazuje raptowne zmiany (rys. 16.1c), obciążenie nazywamy *nagłym*, gdy  $\Delta P$  ma wartość skończoną, lub *uderzeniem*, gdy czas  $\Delta t$  działania siły jest nadzwyczaj krótki, a wartość  $Q$  tak duża, że impuls  $\bar{S} = \int Q dt$  ma wartość skończoną.

### 16.1. Drgania własne układu o jednym stopniu swobody

Schematem obliczeniowym dla wielu ustrojów jest układ (rys. 16.2) złożony z bezmasowego elementu sprężystego  $C$  i takiegoż tłumika  $D$  łączących równolegle podstawę  $B$  z masą  $m$ . Istnienie prowadnic powoduje, że położenie masy określa jedna tylko współ



Rys. 16.2. Analiza układu o jednym stopniu swobody

rzędna  $u_A$  i dlatego mówimy, że układ jest o *jednym stopniu swobody*. Zbadajmy teraz ruch masy  $m$ , gdy działa na nią obciążenie  $Q(t)$  i gdy w obranej chwili  $t$  przesunięcie masy jest  $u_A$ , a jej prędkość  $\dot{u}_A = du_A/dt$ . Całkowity układ sił działających stanowią poza siłą  $Q(t)$ :

- a) siła ciężkości  $mg$  zrównoważona reakcją  $R_A$  prowadnic;
- b) oddziaływanie  $P$  elementu sprężystego proporcjonalne do  $u_A$  i skierowane przeciwnie do tego przesunięcia, czyli

$$P = -Ku_A, \tag{a}$$

gdzie  $K$  N/m — *stała elementu sprężystego*  $C$  jest wartością siły odpowiadającej jednostkowemu przesunięciu  $u_A = 1$ ; w przypadku sprężyny jest to znana z art. 9.5 *stała sprężyny*;

- c) przeciwna do kierunku ruchu siła  $H$  oporu tłumika, o której zakładamy, że jest proporcjonalna do prędkości  $\dot{u}_A$ , czyli

$$H = -c\dot{u}_A = -c(du_A/dt), \tag{b}$$

gdzie  $c$  N s/m — *stała tłumika* zależy od jego rodzaju i jest wartością siły oporu, gdy prędkość  $\dot{u}_A = 1$  m/s.

Uwzględniając ten obraz sił mamy równanie ruchu masy  $m$

$$m(d^2u_A/dt^2) = Q - Ku_A - c(du_A/dt). \tag{c}$$

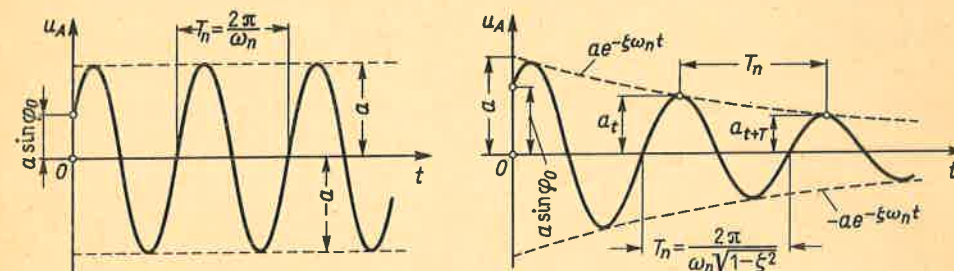
Po uporządkowaniu i oznaczeniu  $\ddot{u}_A = d^2u_A/dt^2$  oraz

$$\omega_n = \sqrt{K/m} \text{ s}^{-1}, \quad 2\zeta = c/\sqrt{Km} \tag{16.3}$$

sprawdzaamy równanie (c) do postaci

$$\ddot{u}_A + 2\zeta\omega_n\dot{u}_A + \omega_n^2 u_A = Q/m. \tag{16.4}$$

Rozwiązanie tego równania i dyskusja wyników znana jest z wykładów mechaniki<sup>(1)</sup>. I tak, gdy obciążenie  $Q = 0$ , wówczas rozwiązanie równania jednorodnego (16.4) opisuje tzw. *drżania swobodne* układu (rys. 16.3), a mianowicie:



Rys. 16.3. Obraz drgań własnych bez tłumienia i z tłumieniem

**Drgania swobodne nietłumione**, gdy  $c = 0$ , o postaci

$$u_A = a_n \sin(\omega_n t + \varphi_n), \tag{16.5}$$

gdzie  $\omega_n$  — *pulsacja nietłumionych drgań własnych*, której odpowiada według wzoru (16.2) częstość  $\nu_n$  i okres  $T_n$ . Amplitudę  $a_n$  i początkową fazę  $\varphi_n$  dobieramy z podanych dla  $t = 0$  warunków, np.  $(u_A)_{t=0} = 0$ ,  $(du_A/dt)_{t=0} = \bar{v}_0$ .

**Drgania swobodne tłumione**, gdy  $c \neq 0$ , o postaci

$$u_A = a_n e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2} + \varphi_n). \tag{16.6}$$

<sup>(1)</sup> Patrz J. Leyko, *Mechanika ogólna*, t. 2, Warszawa 1972, PWN.

Wynik ten jest słuszny, gdy  $\zeta < 1$ , a więc gdy tłumienie jest małe. W tym najczęściej spotykanym przypadku pulsacja

$$\omega_n^* = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (16.7)$$

jest mniejsza, a okres drgań  $T_n^* = 2\pi/\omega_n^*$  dłuższy niż poprzednio. Gdy  $\zeta < 0,2$ , wówczas z techniczną dokładnością bierzemy  $\omega_n^* \approx \omega_n$  i  $T_n^* \approx T_n$ . Szybkość zamierania drgań charakteryzuje stosunek przesunięć w odstępie czasu  $T_n^*$ , czyli  $u_A(t)$  i  $u_A(t + T_n^*)$ . Ponieważ  $\omega_n^* T_n^* = 2\pi$ , zatem łatwo udowodnić, że stosunek ten ma wartość stałą

$$u_A(t + T_n^*)/u_A(t) = e^{-\zeta \omega_n T_n^*} < 1,$$

przy czym wykładnik  $\delta = \zeta \omega_n T_n^*$ , tzw. logarytmiczny dekrement tłumienia, można wyrazić, jak następuje:

$$\delta = \zeta \omega_n T_n^* = 2\pi\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (16.8)$$

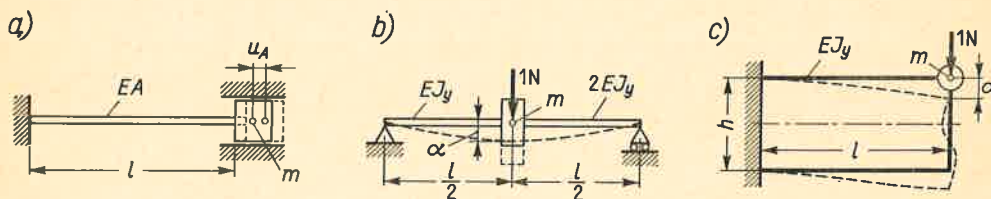
Przy silnym tłumieniu, gdy  $\zeta > 1$ , ruch masy  $m$  jest aperiodyczny i wyraża się zależnością

$$u_A = a_n e^{-\zeta \omega_n t} \sinh(\omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2} + \varphi_n). \quad (16.9)$$

Wykorzystanie tych znanych skądinąd wyników sprowadza się w wytrzymałości materiałów głównie do określenia częstości drgań własnych. Ponieważ w ustrojach parametr tłumienia  $\zeta$  jest na ogół mały, zadanie redukuje się do obliczenia

$$\omega_n \approx \omega_n^* \approx \sqrt{K/m},$$

a to z kolei do wyznaczenia stałej  $K$  elementu sprężystego. Element ten może mieć różną postać, a mianowicie poza sprężyną, jak na rys. 16.2, elementem tym może być, jak na rys. 16.4, rozciągany pręt, zginana belka, rama itp. W każdym z tych przypadków wartość  $K$  można obliczyć, zgodnie z definicją, jako siłę odpowiadającą jednostkowemu przesunięciu masy  $m$ . W bardziej złożonych ustrojach (rys. 16.4b, c) obliczamy najpierw<sup>(1)</sup>



Rys. 16.4. Przykłady ustrojów o jednym stopniu swobody

przemieszczenie  $\alpha$  m/N wywołane jednostkową siłą 1 N działającą w kierunku współrzędnej określającej przesunięcie masy  $m$ , a następnie określamy

$$K = 1/\alpha \text{ N/m}. \quad (16.10)$$

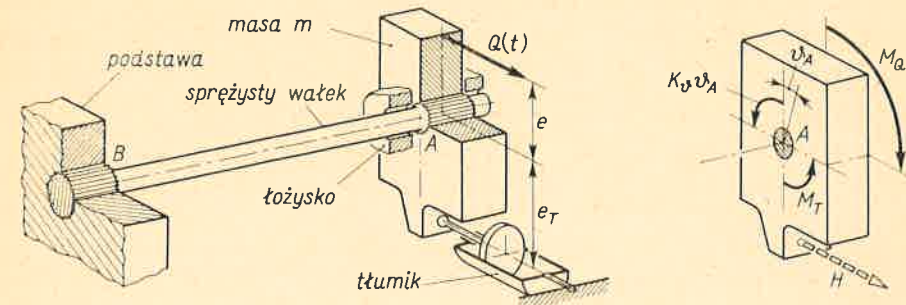
W opisywanych dotąd modelach położenie masy  $m$  określało przesunięcie liniowe. Ten sam jednak obraz zjawisk mamy w przypadku masy osadzonej w łożyskach (rys. 16.5),

<sup>(1)</sup> Wykorzystując przy tym reguły znane z art. 9.3, 9.4 i 10.7.

gdy parametrem jest kąt obrotu  $\vartheta_A$ . O ruchu masy decydują tym razem nie siły, lecz momenty sił, a mianowicie moment obciążenia  $Q(t)$ , czyli  $M_Q = Qe$ , oraz:

a) moment oddziaływania elementu sprężystego, proporcjonalnego do kąta  $\vartheta_A$  skierowany przeciwnie do ruchu, czyli

$$M = -K_\vartheta \vartheta_A, \quad (d)$$



Rys. 16.5. Ustrój drgający obrotowo

gdzie  $K_\vartheta$  Nm/rad — stała sprężysta elementu jest wartością momentu odpowiadającego kątowi  $\vartheta_A = 1$  rad; gdy elementem tym jest, jak na rysunku, skręcany wałek, wtedy według (3.11)

$$K_\vartheta = GJ_0/l; \quad (e)$$

b) moment  $M_H$  siły oporu  $H$  tłumika, o której zakładamy, że jest proporcjonalna do prędkości liniowej  $e_T \dot{\vartheta}_A$ , skąd

$$M_T = -He_T = -ce_T \dot{\vartheta}_A e_T = -c_\vartheta \dot{\vartheta}_A, \quad (f)$$

gdzie  $c_\vartheta = ce_T^2$  Nms/rad — stała tłumika odniesiona do prędkości kątowej  $\dot{\vartheta}_A = d\vartheta_A/dt$  masy  $m$ .

Oznaczając przez  $I$  kg m<sup>2</sup> moment bezwładności masy  $m$  względem osi obrotu  $AB$  otrzymujemy równanie ruchu

$$I \ddot{\vartheta}_A = M_Q - K_\vartheta \vartheta_A - c_\vartheta \dot{\vartheta}_A, \quad (g)$$

które po przekształceniu i wprowadzeniu oznaczeń

$$\omega_n = \sqrt{K_\vartheta/I} \text{ s}^{-1}, \quad 2\zeta = c_\vartheta/\sqrt{K_\vartheta I}, \quad (16.11)$$

otrzymuje postać podobną do (16.4), a mianowicie

$$\ddot{\vartheta}_A + 2\zeta\omega_n \dot{\vartheta}_A + \omega_n^2 \vartheta_A = M_Q/I. \quad (16.12)$$

Z tego faktu wynika, że po dostosowaniu oznaczeń wszystkie poprzednie rezultaty są słuszne i w tym przypadku. Podobnie jak poprzednio sam element sprężysty może mieć różną postać, co trzeba uwzględnić przy określeniu wartości  $K_\vartheta$ .

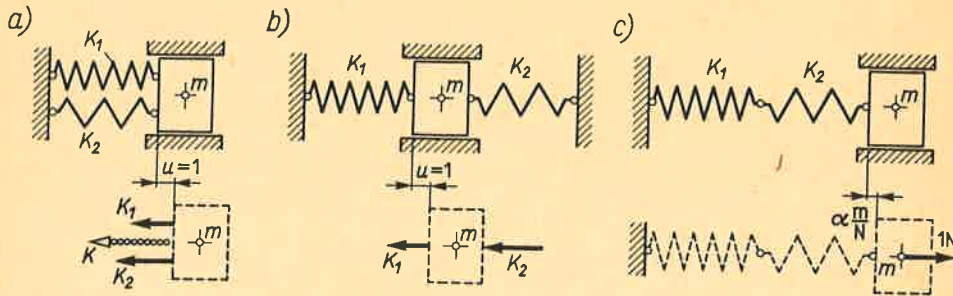


## Zadania

1. Pomijając tłumienie obliczyć częstość drgań własnych masy  $m$  połączonej z podstawą dwiema sprężynami o stałych  $K_1$  i  $K_2$  (rys. 16.6).

Rozwiązanie. W wariantach z rys. 16.6a i b przy jednostkowym przesunięciu masy  $m$  siły w sprężynach są odpowiednio  $K_1$  i  $K_2$ , a całkowita siła  $K = K_1 + K_2$ , wobec czego

$$\omega_n = \sqrt{(K_1 + K_2)/m}.$$



Rys. 16.6. Równoległe (a, b) i szeregowe (c) ustawienie elementów sprężystych

W wariantach z rys. 16.6c przesunięcie  $\alpha$  przy działaniu siły 1 N jest sumą odkształceń  $(1/K_1)$  i  $(1/K_2)$  sprężyn i wzoru (16.10)

$$1/K = (1/K_1) + (1/K_2),$$

skąd pulsacja

$$\omega_n' = \sqrt{K_1 K_2 / m (K_1 + K_2)} < \omega_n.$$

Wynik ten można uogólnić na przypadek większej liczby „sprężyn”, a mianowicie stała  $K$  zespołu sprężyn połączonych „równoległe” (rys. 16.6a, b) jest  $K = \Sigma K_i$ ; przy połączeniu „szeregowym” (rys. 16.6c) wyznacza się ją z  $1/K = \Sigma (1/K_i)$ .

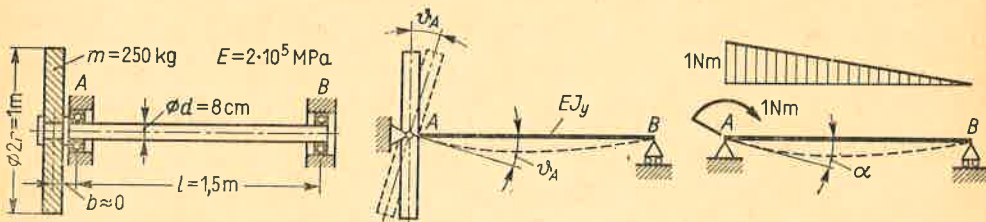
2. Dla układów z zadania 1 wykonać obliczenia, gdy masa  $m = 1$  kg, a wymiary sprężyn (rys. 9.41) są odpowiednio:  $D_1 = 60$  mm,  $d_1 = 7$  mm,  $n_1 = 10$  oraz  $D_2 = 50$  mm,  $d_2 = 6$  mm,  $n_2 = 8$  i  $G_1 = G_2 = 7,6 \cdot 10^4$  MPa.

Odp. Z wzoru (9.15) jest  $K = P/f$ , skąd  $K_1 = 10,5$  kN/m,  $K_2 = 11,2$  kN/m, a następnie  $\omega_n = 147$  s<sup>-1</sup>,  $\omega_n' = 73,5$  s<sup>-1</sup>. Odpowiadające częstości  $\nu = 23,5$  herców i  $\nu' = 11,7$  herców.

3. Wyznaczyć częstość nietłumionych drgań własnych ustrojów (rys. 16.4a,b).

Odp. a)  $\omega_n = \sqrt{EA/ml}$ ; b) po przyłożeniu siły 1 N wyznaczamy  $\alpha = l^3/64EJ_y$ , skąd  $\omega_n = \sqrt{64EJ_y/ml^3}$ .

4. Osadzony w wahliwych łożyskach A i B wałek złączony jest na sztywno z płaską nieodkształcalną tarczą kołową o masie  $m$  (rys. 16.7). Wyznaczyć częstość  $\nu_n$  nietłumionych drgań własnych przy obrocie masy w płaszczyźnie rysunku.



Rys. 16.7. Przykład drgań obrotowych

## 16.1. Drgania własne układu o jednym stopniu swobody

Odp. Przy takiej postaci drgań  $I = mr^2/4 = 15,62$  kg m<sup>2</sup>, odkształcenie  $\alpha = (1 \cdot l/2) (2/3) (1/EJ_y)$ ,  $K_\theta = 3EJ_y/l = 804$  kN m/rad i  $\omega_n = \sqrt{K_\theta/I} = 227$  s<sup>-1</sup>, skąd  $\nu_n = 36$  herców.

5. Jak zmieni się wynik zadania 4, jeśli długość praktycznie nieodkształcalnego wspornika jest  $b = 12$  cm?

Odp. Zmieni się moment bezwładności  $I = (mr^2/4) + mb^2 = 19,22$  kg m<sup>2</sup>, gdyż oś obrotu zostanie w punkcie A;  $\nu_n \approx 32,5$  herca.

6. Jak zmieni się pulsacja drgań własnych ustroju (rys. 16.2), jeśli obrócić go w położenie pionowe (rys. 16.8), powodując tym względną zmianę kierunku działania siły ciężkości?

Rozwiązanie. Równanie ruchu przy zmienionym obrazie sił jest

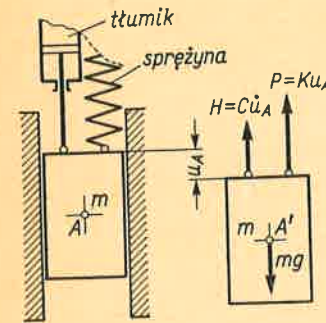
$$m\ddot{u}_A = mg - Ku_A - c\dot{u}_A,$$

gdzie przesunięcie  $u_A$  mierzone jest od położenia odpowiadającego nienapiętej sprężynie. Po przekształceniu równanie to

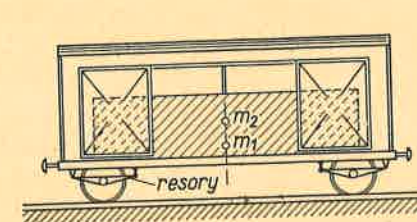
$$\ddot{u}_A + 2\zeta\omega_n\dot{u}_A + \omega_n^2 u_A = g$$

różni się od (16.4) wyrazem wolnym po prawej stronie. Jego rozwiązanie jest więc sumą rozwiązania ogólnego (16.6) równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego o postaci

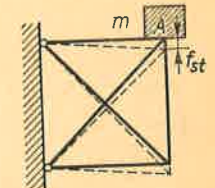
$$\bar{u}_A = g/\omega_n^2 = mg/K = \text{const.}$$



Rys. 16.8. Do zadania 6



Rys. 16.9. Do zadania 7



Rys. 16.10.

Tak więc zmiana położenia ustroju nie wpływa na charakter ruchu, a więc i pulsację  $\omega_n$ , powoduje jedynie zmianę początku układu, względem którego mierzymy  $u_A$  o wielkość odpowiadającą statycznemu działaniu siły ciężkości. Wynik ten ma charakter ogólny, a jego zastosowanie ułatwia obliczenie częstości drgań własnych.

7. Praktycznie nieodkształcalne pudło wagonu o masie  $m_1 = 10$  Mg uresorowane jest na dwóch jednakowych wózkach (rys. 16.9). Po napełnieniu ładunkiem  $m_2 = 40$  Mg pudło osiadło o  $f = 5$  cm. Wyznaczyć częstość pionowych drgań pudła przed załadunkiem i po załadunku.

Odp. Stała  $K = m_2 g/f = 7,85$  MN/m; dla pustego pudła  $\omega_{n1} = \sqrt{K/m_1} = 28,1$  s<sup>-1</sup> i  $\nu_{n1} \approx 4,5$  herca; dla pełnego  $\omega_{n2} = \sqrt{K/(m_1 + m_2)} = 12,6$  s<sup>-1</sup>,  $\nu_{n2} = 2,0$  herca.

8. Na skutek zamontowania masy o ciężarze  $mg$  na nieważkiej kratownicy (rys. 16.10) nastąpiło pionowe przesunięcie węzła A o  $f_{st} = 0,2$  mm. Wyznaczyć częstość nietłumionych pionowych drgań własnych tego ustroju.

Odp.  $K = mg/f_{st}$ ,  $\omega_n = \sqrt{g/f_{st}} = 221$  s<sup>-1</sup>,  $\nu_n = 35,2$  herca. Należy zauważyć, że okres drgań własnych  $T_n = 2\pi\sqrt{f_{st}/g}$  jest taki jak dla wahadła matematycznego o długości  $l = f_{st}$ .

9. Obliczyć częstość nietłumionych drgań własnych masy  $m$  w kierunku OA (rys. 16.11). Pręt CAB jest nieważki.

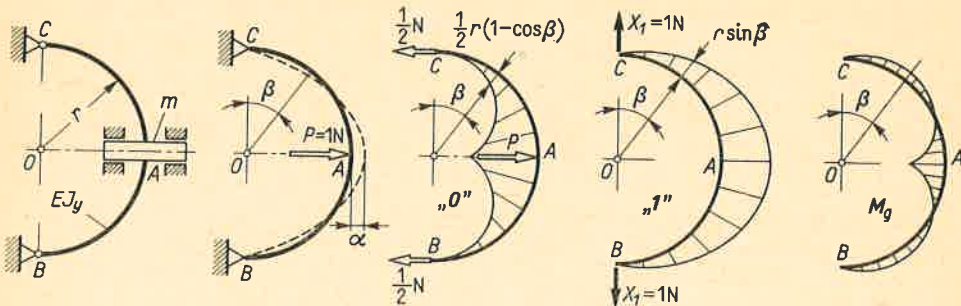


Rozwiązanie. Główna trudność polega na obliczeniu stałej  $K$ , gdyż ustrój jest statycznie niewyznaczalny. Po obciążeniu siłą  $P = 1 \text{ N}$  działającą w kierunku ruchu masy  $m$  wydzielimy stany „0” i „1” jak podaje rysunek i z równania kanonicznego

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0,$$

wyznamy  $X_1 = 1/\pi \text{ N}$ , gdyż  $\alpha_{1,1} = \pi r^3/2EJ_y$ ,  $\alpha_{1,0} = -r^3/2EJ_y$ . Po obliczeniu  $X_1$  ustrój traktujemy jak statycznie wyznaczalny, przy czym moment gnący

$$M_g = (1 \cdot r/2) [1 - \cos \beta - (2 \sin \beta/\pi)].$$



Rys. 16.11. Przykład ustroju ze statycznie niewyznaczalnym elementem sprężystym

Ponieważ mamy określić przesunięcie  $\alpha$ , „czujnikiem” jest więc siła 1 N jak w stanie „0” i według art. 9.3 i 10.7 mamy

$$\alpha = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{r}{2} \left(1 - \cos \beta - \frac{2}{\pi} \sin \beta\right) \frac{r}{2} (1 - \cos \beta) \frac{rd\beta}{EJ_y} = \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{8\pi} \frac{r^3}{EJ_y},$$

skąd  $K = 1/\alpha \approx \frac{26,4 EJ_y}{r^3} \text{ N/m}$ , a szukana pulsacja

$$\omega_n = \sqrt{K/m} \approx \frac{5,14}{7,25} \sqrt{EJ_y/mr^3}.$$

## 16.2. Okresowe obciążenia ustroju o jednym stopniu swobody

Wracając do ustroju z rys. 16.2 zbadamy obecnie jego zachowanie się pod działaniem najprostszego okresowego obciążenia  $Q(t)$  o postaci

$$Q(t) = Q_1 \sin \omega t.$$

W takim przypadku rozwiązanie  $u_A(t)$  liniowego równania (16.4) jest sumą dwóch składników

$$u_A(t) = u_{An} + u_{Aw}, \quad (a)$$

z których  $u_{An}$  jest rozwiązaniem ogólnym jednorodnego równania (16.4), gdy  $Q(t) \equiv 0$  i zależnie od wartości  $\zeta$  ma postać (16.5), (16.6) lub (16.9). Składnik drugi, tj.  $u_{Aw}$ , będący rozwiązaniem szczególnym, przedstawia ruch harmoniczny, tzw. *drżanie wymuszone*, z pulsacją  $\omega$  równą pulsacji siły  $Q$ , a jego równanie ma postać

$$u_{Aw} = a \sin(\omega t - \varphi). \quad (16.13)$$

Amplituda  $a$  i przesunięcie fazowe  $\varphi$  są przy tym:

$$a = \frac{Q_1}{K} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\zeta^2 (\omega/\omega_n)^2}}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{2\zeta (\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (16.14)$$

i zależą od stosunku  $\omega/\omega_n$  oraz parametru  $\zeta$ . Amplituda zależy ponadto od czynnika  $Q_1/K$ , będącego statycznym przesunięciem  $u_A = f_{st}$  wywołanym przez maksymalną siłę  $Q = Q_1$ .

Zbadajmy teraz skutki wywołane zmianą pulsacji  $\omega$  siły  $Q$ . Gdy siła ta zmienia się bardzo powoli, czyli gdy  $\omega \approx 0$ , wówczas

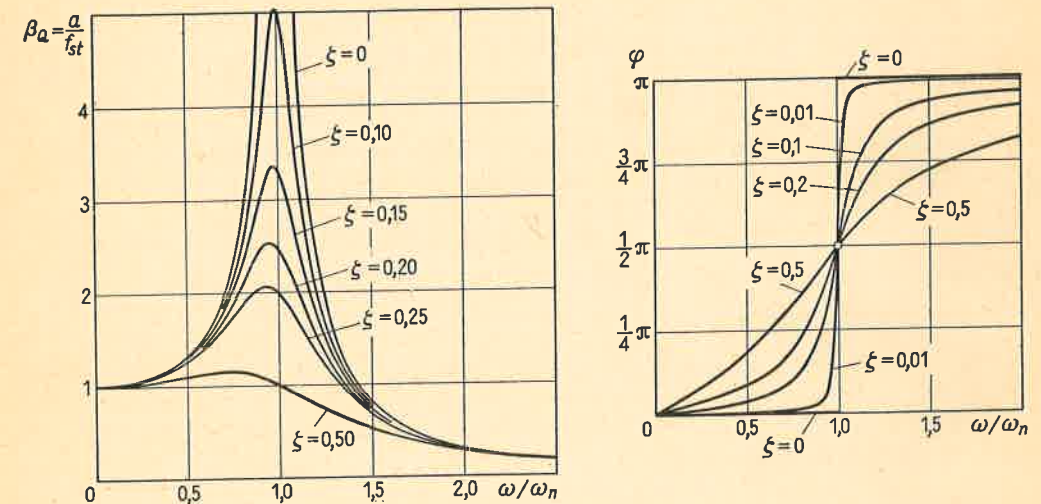
$$(a)_{\omega \approx 0} = Q_1/K = f_{st}, \quad (\varphi)_{\omega \approx 0} = 0, \quad (b)$$

co odpowiada obciążeniu quasi-statycznemu. Gdy  $\omega = \omega_n$ , wówczas

$$(a)_{\omega = \omega_n} = Q_1/2\zeta K = f_{st}/2\zeta, \quad (\varphi)_{\omega = \omega_n} = \pi/2, \quad (16.15)$$

a więc przemieszczenie  $u_{Aw}$  jest opóźnione o ćwierć okresu względem siły  $Q$ . Widać też, że przy słabym tłumieniu, amplituda jest znacznie większa od wartości  $f_{st}$  odpowiadającej statycznemu działaniu  $Q$ , np. dla  $\zeta = 0,01$  mamy  $a = 50 f_{st}$ .

Pełny obraz przebiegu  $a/f_{st}$  i  $\varphi$  w funkcji  $\omega/\omega_n$  i różnych wartości tłumienia (rys. 16.12) wskazuje, że w otoczeniu wartości  $\omega/\omega_n = 1$  występuje wzrost amplitudy tym wyraźniejszy,



Rys. 16.12. Amplituda i przesunięcie fazowe drgań wymuszonych

im słabsze jest tłumienie. Gdy nie ma tłumienia ( $\zeta = 0$ ), wówczas dla  $\omega/\omega_n = 1$  amplituda rośnie nieskończenie. To zjawisko wzrostu amplitudy przy pokrywaniu się częstości siły wymuszającej i częstości drgań własnych nietłumionych nazywamy *rezonansem*, a samo pokrywanie się częstości *warunkiem rezonansu*. Przy słabym tłumieniu maksimum amplitudy jest bliskie wartości danej z (16.15).

Wracając do wzoru (a) zauważmy, że w układzie z tłumieniem

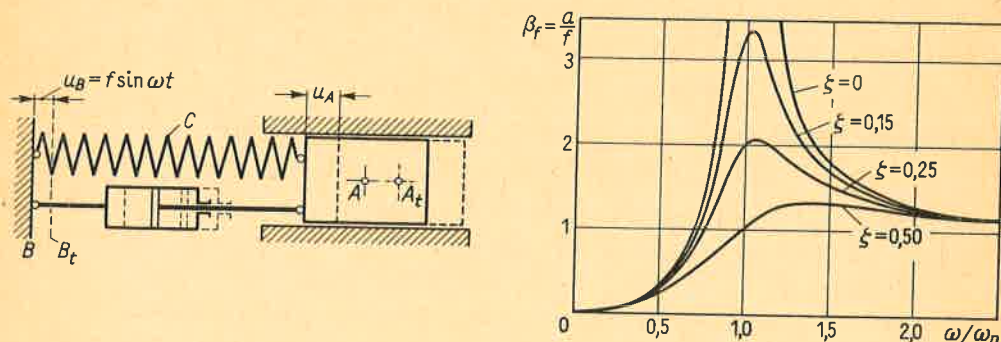
$$u_A = a_n e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2} + \varphi_n) + a \sin(\omega t - \varphi).$$



Widać stąd, że po upływie pewnego czasu od chwili startu zostaje tylko drugi składnik, tzn. niegasnące z czasem drgania wymuszone, trwające dopóty, dopóki działa okresowa siła  $Q$ .

Podobny obraz zjawisk występuje przy tzw. *wymuszeniu kinematycznym* (rys. 16.13), gdy punkt  $B$  podstawy wykonuje ruch

$$u_B = f \sin \omega t. \quad (c)$$



Rys. 16.13. Kinematyczne wymuszenie drgań

W takim przypadku działające na masę siły  $P$  i  $H$  są

$$P = -K(u_A - u_B), \quad H = -c[d(u_A - u_B)/dt],$$

gdyż odkształcenie elementu  $C$  jest  $u_A - u_B$ , a względna prędkość elementów tłumika wynosi  $[(du_A/dt) - (du_B/dt)]$ . W rezultacie zamiast równania (c) z art. 16.1 mamy teraz

$$m(d^2 u_A/dt^2) = -K(u_A - u_B) - c[d(u_A - u_B)/dt]. \quad (d)$$

Odejmując od obydwóch stron wielkość  $m(d^2 u_B/dt^2)$  i biorąc nową zmienną  $u_{AB} = u_A - u_B$  oraz oznaczenia  $\zeta$  i  $\omega_n$  według wzoru (16.3), sprowadzamy równanie (d) do postaci (16.4)

$$\ddot{u}_{AB} + 2\zeta\omega_n \dot{u}_{AB} + \omega_n^2 u_{AB} = -\ddot{u}_B = \omega^2 f \sin \omega t, \quad (16.16)$$

z tym że rolę czynnika  $Q_1/m$  spełnia teraz człon  $\omega^2 f$ . Ta zmiana nie wpływa na postać drgań wymuszonych, czyli

$$u_{ABw} = a \sin(\omega t - \varphi), \quad (e)$$

ani na przesunięcie fazowe  $\varphi$ , wpływa natomiast na amplitudę

$$a = f \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}}, \quad (16.17)$$

której przebieg w funkcji  $\omega/\omega_n$  jest podany na rysunku.

Aby ocenić bezpieczeństwo sprężystego elementu ustroju, trzeba znać wartość siły działającej na niego. W przypadku z rys. 16.2, gdy drgania własne zamarły i proces jest ustalony, siła ta

$$Ku_{Aw} = Ka \sin(\omega t - \varphi) \quad (f)$$

ma pulsację równą pulsacji siły  $Q$  i amplitudę  $Ka$ . Oznaczając podaną na rys. 16.12 wielkość  $a/f_{st} = \beta_Q$  mamy

$$Ka = Q_1 \beta_Q. \quad (16.18a)$$

Podobnie przy wymuszeniu kinematycznym (rys. 16.13) i ustalonym procesie (e) amplituda siły w elemencie  $C$  jest

$$Ka = Kf\beta_f, \quad (16.18b)$$

gdzie  $\beta_f = a/f$ . W porównaniu zatem ze statycznym działaniem siły  $Q_1$  bądź statycznym przesunięciem  $f$ , rzeczywiste siły w sprężystym elemencie ustroju rosną odpowiednio  $\beta_Q$  bądź  $\beta_f$  razy. W tym samym stosunku rosną i naprężenia w elemencie. Jeśli więc  $\sigma_{st}$  lub  $\tau_{st}$  są wartościami naprężeń przy statycznym obciążeniu  $Q_1$  lub statycznym odkształceniu  $f$ , to rzeczywiste naprężenia  $\sigma$  lub  $\tau$  zależnie od sposobu wymuszenia są

$$\left. \begin{matrix} \sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} = \beta_Q \left\{ \begin{matrix} \sigma_{st} \\ \tau_{st} \end{matrix} \right\} = \beta_f \left\{ \begin{matrix} \sigma_{st} \\ \tau_{st} \end{matrix} \right\}. \quad (16.19)$$

Wzory (16.18) i (16.19) są słuszne tylko wtedy, gdy tłumik i element sprężysty są *odrębnymi zespołami konstrukcyjnymi*. Gdy ten sam element pełni funkcje i sprężyny, i tłumika, wówczas wartość siły jest inna (zadanie 7).

Wszystkie otrzymane wyniki można wykorzystać, gdy przebieg  $Q(t)$  jest dowolną funkcją o okresie  $T_w$  (rys. 16.1b). Jak wiadomo, funkcję taką można rozwinąć w szereg Fouriera

$$Q(t) = Q_0 + \sum A_k \sin(2\pi kt/T_w) + \sum B_k \cos(2\pi kt/T_w). \quad (g)$$

Oznaczając przez  $\omega = 2\pi/T_w$  — podstawową pulsację siły  $Q$  oraz

$$Q_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \text{tg } \psi_k = B_k/A_k \quad (0 \leq \psi_k < \pi), \quad (h)$$

dobrowodzamy poprzednie wyrażenie do postaci

$$Q(t) = Q_0 + \sum Q_k \sin(k\omega t + \psi_k), \quad (16.20)$$

gdzie  $k = 1, 2, 3, \dots$  — liczba naturalna oznacza tzw. *rzęd harmonicznej* siły wymuszającej  $Q$ . Odpowiadające takiemu obciążeniu rozwiązanie szczególne równania (16.4) jest, z racji jego liniowości, sumą rozwiązań dla każdego ze składników oddzielnie. I tak składnikowi stałemu  $Q_0$  odpowiada  $u_{A0} = Q_0/K$ . Dla  $k$ -tej harmonicznej obciążenia, czyli  $Q_k \sin(k\omega t + \psi_k)$ , jest

$$u_{Ak} = a_k \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k), \quad (i)$$

gdzie odpowiednio amplituda  $a_k$  i przesunięcie fazowe  $\varphi_k$

$$a_k = \frac{Q_k}{K} \frac{1}{\sqrt{[1 - (k\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\zeta^2(k\omega/\omega_n)^2}}, \quad \text{tg } \varphi_k = \frac{2\zeta(k\omega/\omega_n)}{1 - (k\omega/\omega_n)^2} \quad (16.21)$$

wynikają z wzorów (16.14), gdy  $(\omega/\omega_n)$  zastąpić przez  $(k\omega/\omega_n)$ . W rezultacie drgania wymuszone odpowiadające obciążeniu (16.20) mają postać

$$u_A = (Q_0/K) + \sum_1^{\infty} a_k \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k). \quad (16.22)$$

Przy wymuszeniu kinematycznym o postaci

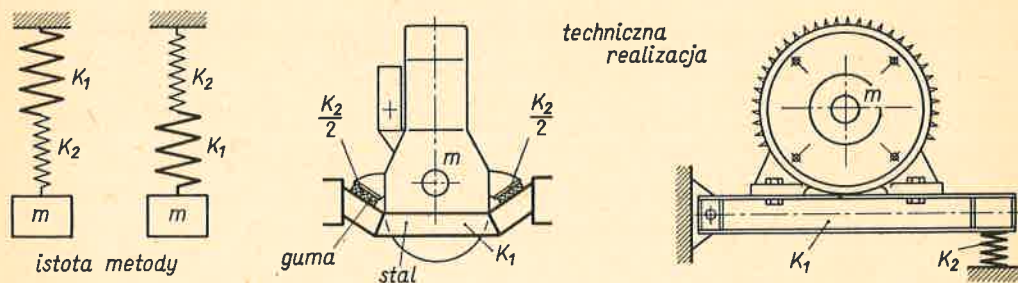
$$u_B(t) = f_0 + \sum_1^{\infty} f_k \sin(k\omega t + \psi_k) \quad (16.23)$$

otrzymujemy zależności podobne, lecz nieidentyczne z (16.21) i (16.22). Ich sformułowanie zostawia się czytelnikom.

Podobieństwo równań (16.4) i (16.12) umożliwia przeniesienie rezultatów tego artykułu na przypadek, gdy parametrem określającym położenie masy  $m$  jest kąt obrotu  $\vartheta_A$  (rys. 16.5). Warunkiem jest dostosowanie pojęć i oznaczeń. W uzupełnieniu mianowicie poprzedniej zamiany masy  $m$  na moment bezwładności  $I$ , stałej  $K$  N/m na stałą  $K_\theta$  Nm/rad oraz  $c$  Ns/m na  $c_\theta$  Nms/rad, wprowadzamy zamiast amplitud sił  $Q_1, Q_k$  odpowiednio amplitudy momentów  $M_1, M_k$ . Jest rzeczą jasną przy tym, że amplitudy  $a$  lub  $a_k$  oznaczają teraz nie przesunięcia, lecz kąty obrotu.

W większości zagadnień technicznych zjawisko rezonansu jest szkodliwe, powoduje bowiem wzrost naprężeń w sprężystych elementach ustroju. Jak widać z wykresu  $\beta_Q$  (rys. 16.12), dla wyeliminowania tego zjawiska należy tak dobrać masy lub sztywności elementu, aby pulsacja  $\omega_n$  drgań własnych była zdecydowanie różna od pulsacji  $\omega$  czynnika wymuszającego. Innymi słowy dążymy do tego, aby stosunek  $\omega/\omega_n$  był albo znacznie mniejszy, albo znacznie większy od jedności. Z tych dwóch wariantów lepszy jest drugi. Na ogół bowiem czynnik wymuszający ma postać według (16.20) i zawiera nie tylko podstawową pulsację  $\omega$ , lecz i wyższe jej harmoniczne. Jeśli  $\omega_n \ll \omega$ , to ustrój pracuje w nadrezonansie w stosunku do *wszystkich* harmonicznych siły  $Q$ . W takim stanie współczynniki  $\beta_Q$  są bardzo małe dla wszystkich harmonicznych, a więc małe są też siły i naprężenia w elemencie sprężystym. Ten sam wariant, tj.  $\omega_n \ll \omega$ , jest lepszy i przy wymuszeniu kinematycznym. Dla spełnienia bowiem postulatu  $\omega_n \ll \omega$  należy tak bardzo zmniejszyć wartość stałej  $K$ , że w wyniku iloczyn  $K\beta_f$  jest mały, chociaż współczynnik  $\beta_f$  jest tu w stanie nadrezonansowym większy niż w podrezonansowym. Tak więc dla usunięcia niebezpieczeństwa rezonansu należy stosować elementy sprężyste bardzo podatne. Cel ten osiągamy włączając „szeregowo” z masą i głównym elementem nośnym ustroju dodatkowy element sprężysty o bardzo małej sztywności  $K_2$  (rys. 16.14). Na skutek tego stała  $K$  zespołu elementów (głównego i dodatkowego) jest jak w zadaniu 1 art. 16.1, czyli

$$K = [K_1 K_2 / (K_1 + K_2)] < K_2.$$



Rys. 16.14. Zasada i realizacja „elastycznego” zawieszenia

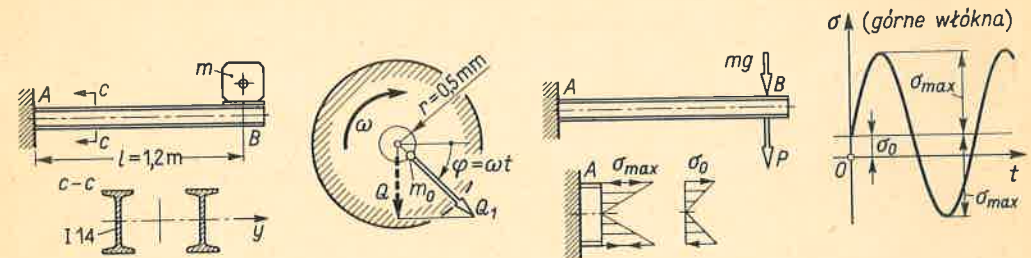
Codziennym przykładem takich rozwiązań jest tzw. *elastyczne zawieszenie* silników zwłaszcza spalinowych, pojazdów itp.

Jak widać z rys. 16.12 i 16.13, przy pracy ustroju w stanie nadrezonansowym, gdy  $\omega \gg \omega_n$ , tłumienie nie ma znaczenia. Jest ono jednak niezbędne do opanowania procesu rozruchu, w którym startując od  $\omega = 0$  przechodzimy stopniowo do  $\omega \gg \omega_n$  mijając po drodze i stan rezonansu. Okolicznością pomyślną jest, że osiągnięcie amplitudy o wartości według (16.14) lub (16.17) wymaga pewnego czasu. Jeśli więc przejście przez rezonans jest szybkie, to nawet przy małym tłumieniu stan ten nie jest groźny, gdyż amplituda nie zdąży osiągnąć dużej wartości. Inna jest sytuacja przy powolnym rozruchu, gdyż wtedy tłumienie jest jedynym czynnikiem ograniczającym wartość amplitudy, a więc i naprężenia.

Niekiedy, na skutek narzuconych ograniczeń, nie można uniknąć długotrwałej pracy ustroju w warunkach rezonansu. W takim przypadku jedyną metodą redukcji amplitudy i naprężeń jest zwiększenie tłumienia przez zastosowanie specjalnych tłumików, dobór odpowiedniego materiału bądź przez takie połączenie elementów, aby przy ich odkształceniu występował i poślizg części, i tarcie. Przykładem takich połączeń są szwy nitowe.

### Zadania

1. Na wsporniku złożonym z dwóch profili I 14 (rys. 16.15) umocowano silnik o masie  $m = 160$  kg, którego wirnik o masie  $m_0 = 60$  kg nie jest idealnie wyważony, lecz ma środek masy przesunięty o  $r = 0,5$  mm. Wyznaczyć przebieg naprężeń w niebezpiecznym przekroju wspornika, gdy wirnik kręci się z  $\bar{n} = 1450$  obr/min. Przyjąć  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa,  $\zeta = 0,03$ ,  $J_y = 2 \cdot 573$  cm<sup>4</sup>,  $W_y = 2 \cdot 81,9$  cm<sup>3</sup>.



Rys. 16.15. Analiza działania siły okresowej

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od obliczenia pulsacji  $\omega_n$  nietłumionych drgań własnych. Ponieważ  $K = 3EJ_y/l^3 = 3,98 \cdot 10^6$  N/m, zatem

$$\omega_n = \sqrt{K/m} = \sqrt{3,98 \cdot 10^6 / 160} = 157,9 \text{ s}^{-1}.$$

Z kolei określamy siłę wymuszającą  $Q$ . Na skutek niewyważenia wirnika oddziałuje on na ustrój wirujący siłą

$$Q_1 = m_0 \omega^2 r = 692 \text{ N},$$

gdzie  $\omega = \pi \bar{n} / 30 = 151,8 \text{ s}^{-1}$  prędkość kątowa wirnika. Siłą wymuszającą drgania jest pionowa składowa siły  $Q_1$

$$Q = Q_1 \sin \varphi = Q_1 \sin \omega t,$$



której pulsacja jest identyczna z prędkością kątową wirnika. Już w tym momencie widzimy, że warunki pracy ustroju są niekorzystne, gdyż  $\omega \approx \omega_n$ . Aby je dokładnie poznać, obliczamy

$$\beta_Q = \frac{1}{\sqrt{[1 - (151,8/157,9)^2]^2 + 4 \cdot 0,03^2 (151,8/157,9)^2}} = 10,55,$$

a z wzoru (16.18a) amplitudę siły zginającej belkę

$$P = Q_1 \beta_Q = 7300 \text{ N}.$$

W niebezpiecznym przekroju  $A$  tej sile odpowiada naprężenie

$$\sigma_{\max} = Pl/W_y = 53,5 \text{ MPa},$$

które zgodnie z wzorem (f) jest sinusoidalnie zmienne i ma pulsację  $\omega$ . Niezależnie od tego wspornik obciąża stałą siłą ciężaru  $mg = 1,57 \text{ kN}$ , wywołująca w przekroju  $A$  naprężenia

$$\sigma_0 = mgl/W_y = 11,5 \text{ MPa}.$$

Całkowite naprężenie w górnych włóknach przekroju  $A$  jest

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_{\max} = 11,5 + 53,5 \sin(\omega t - \varphi) \text{ MPa},$$

a więc zmienia się w granicach  $+65 \text{ MPa}$  i  $-42 \text{ MPa}$ . Podobnie we włóknach dolnych naprężenia są  $-65 \text{ MPa}$  i  $+42 \text{ MPa}$ .

2. Jak zmieni się wynik zadania 1, gdy profile  $\text{I } 14$  zastąpić profilami  $\text{I } 10$ , dla których  $J_y = 2 \cdot 171 \text{ cm}^4$ ,  $W_y = 2 \cdot 34,2 \text{ cm}^3$ .

Odp. Ustrój jest w nadrezonansie;  $\omega_n = 86,1 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta_Q = 0,474$ ,  $\sigma_{\max} = 5,8 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_0 = 27,5 \text{ MPa}$ ; całkowite naprężenie w górnych włóknach przekroju  $A$  zmienia się od  $33,3 \text{ MPa}$  do  $21,7 \text{ MPa}$ . Istota ulepszenia polega nie tylko na około dwukrotnym zmniejszeniu maksymalnych naprężeń, lecz i na zmniejszeniu ich amplitudy.

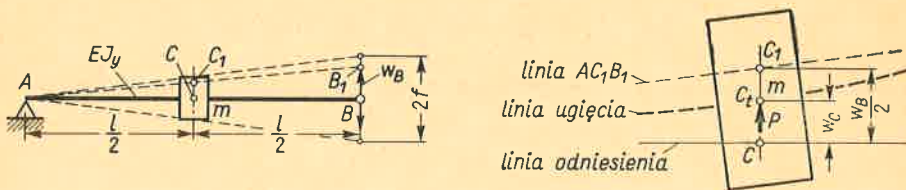
3. Jak zmieni się wynik zadania 1, gdy między silnik a profile włożyć gumowe podkładki, które pod działaniem ciężaru silnika ulegają ściśnięciu o  $f = 3 \text{ mm}$ .

Odp. Stała sprężysta podkładek  $K_2 = mg/f = 524 \text{ kN/m}$ , łączna stała  $K = K_1 K_2 / (K_1 + K_2) = 0,463 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ , skąd  $\omega_n = 53,8 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta_Q = 0,144$ ,  $\sigma_{\max} \approx 0,7 \text{ MPa}$ , a całkowite naprężenie w górnych włóknach przekroju  $A$  zmienia się od  $12,2 \text{ MPa}$  do  $10,8 \text{ MPa}$ . Ten sposób redukcji obciążeń jest więc znacznie lepszy, niż podany w zadaniu 2.

4. Podpora  $B$  nieważkiej podpartej przegubowo belki  $AB$  z osadzoną na środku masą  $m$  wykonuje pionowy okresowy ruch  $w_B = f \sin \omega t$ . Pomijając tłumienie określić prawo ruchu masy oraz ugięcie w środku belki.

Rozwiązanie. W obranej chwili czasu  $t$  podpora  $B$  zajmuje położenie  $B_1$ , a masa  $m$  położenie  $C_1$  (rys. 16.16). Ugięcie belki  $f_c = \overline{C_1 C_1} = (w_B/2) - w_C$ , a reakcja  $P$  belki na masę jest

$$P = K [(w_B/2) - w_C],$$



Rys. 16.16. Do zadania 4

gdzie  $K = 48EJ_y/l^3$  stała sprężysta belki dla ugięcia  $\overline{C_1 C_1} = 1 \text{ m}$ . Równanie ruchu masy  $m$  jest

$$m \ddot{w}_C = P = K [(w_B/2) - w_C] = K f_c$$

lub po przekształceniach

$$\ddot{f}_c + \omega_n^2 f_c = \frac{1}{2} \omega^2 f \sin \omega t,$$

gdzie  $\omega_n = \sqrt{K/m}$ . Interesujące nas rozwiązanie szczególne, odpowiadające ruchowi ustalonymu po zamarcu drgań własnych,

$$f_c = \frac{f}{2 [1 - (\omega/\omega_n)^2]} \sin \omega t$$

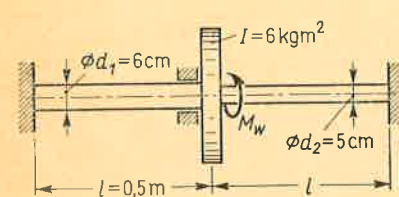
daje amplitudę ugięcia oraz przesunięcie  $w_C = (w_B/2) - f_c$ . Maksymalny moment gnący jest w środku belki

$$M_g = P_{\max} l/4 = 6 EJ_y f l^2 [1 - (\omega/\omega_n)^2].$$

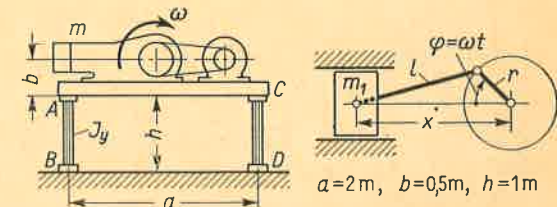
Wynik ten można stosować, gdy  $\omega/\omega_n \neq 1$ .

5. Na wale z utwierdzonymi końcami i o skokowo zmiennym przekroju osadzono koło zamachowe (rys. 16.17), na które działa zmienny moment  $M_1 \sin \omega t$ . Przyjmując dane z rysunku oraz  $M_1 = 200 \text{ N m}$ ,  $\omega = 210 \text{ s}^{-1}$ ,  $G = 7,7 \cdot 10^4 \text{ MPa}$  i współczynnik  $\zeta = 0,03$  obliczyć naprężenia  $\tau$  w obydwóch częściach wału.

Odp. Dla lewej i prawej części stałe sprężyste są:  $K_{\phi 1} = GJ_{01}/l = 1,957 \cdot 10^5 \text{ N m/rad}$ ,  $K_{\phi 2} = 0,943 \cdot 10^5 \text{ N m/rad}$ , a łączna stała  $K_{\phi} = 2,90 \cdot 10^5 \text{ N m/rad}$ . Obliczone stąd  $\omega_n = \sqrt{K_{\phi}/I} = 220 \text{ s}^{-1}$  i  $\beta_Q = 9,40$  dają z (16.18a) amplitudę momentu  $M_w = 1880 \text{ N m}$ . Moment ten dzieli się na część lewą i prawą w stosunku stałych  $K_{\phi 1}$  i  $K_{\phi 2}$ , skąd  $M_1 = M_w K_{\phi 1}/K_{\phi} = 1270 \text{ N m}$ ,  $M_2 = 610 \text{ N m}$ , a naprężenia  $\tau_1 = 29,9 \text{ MPa}$ , i  $\tau_2 = 24,9 \text{ MPa}$ .



Rys. 16.17. Do zadania 5



Rys. 16.18. Do zadania 6

6. Nieodkształcalny agregat sprężarki tłokowej o masie  $m = 500 \text{ kg}$  umocowano na dwóch jednakowych słupach  $AB$  i  $CD$  obustronnie utwierdzonych (rys. 16.18). W czasie pracy tłok sprężarki o masie  $m_1 = 25 \text{ kg}$  wykonuje ruch posuwisto-zwrotny, przy czym wiadomo z mechaniki ogólnej, że przesunięcie

$$x \approx l - (\pi r/4) + r [\cos \omega t + (\pi/4) \cos 2\omega t],$$

gdzie  $\pi = r/l$ . Obliczyć obciążenie słupów, jeśli  $EJ_y = 1,7 \cdot 10^5 \text{ N m}^2$ ,  $\omega = 60 \text{ s}^{-1}$ ,  $l = 0,5 \text{ m}$ ,  $r = 0,15 \text{ m}$ , a współczynnik tłumienia  $\zeta = 0,1$ .

Odp. Tłok oddziałuje na korpus poziomą siłą  $Q = -m_1 \ddot{x} = m_1 r \omega^2 (\cos \omega t + \pi \cos 2\omega t)$  lub po doprowadzeniu do postaci (16.20)

$$Q = Q_1 \sin [\omega t + (\pi/2)] + Q_2 \sin [2\omega t + (\pi/2)],$$

gdzie  $Q_1 = 13,5 \text{ kN}$ ,  $Q_2 = 4,05 \text{ kN}$ . Ponieważ stała  $K = 24EJ_y/h^3 = 4,08 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ,  $\omega_n = \sqrt{K/m} = 90 \text{ s}^{-1}$ , zatem z wzorów (16.21) mamy

$$Ka_1 = 23,7 \text{ kN}, \quad \varphi_1 = 13,5^\circ, \quad Ka_2 = 3,15 \text{ kN}, \quad \varphi_2 = 166,5^\circ$$

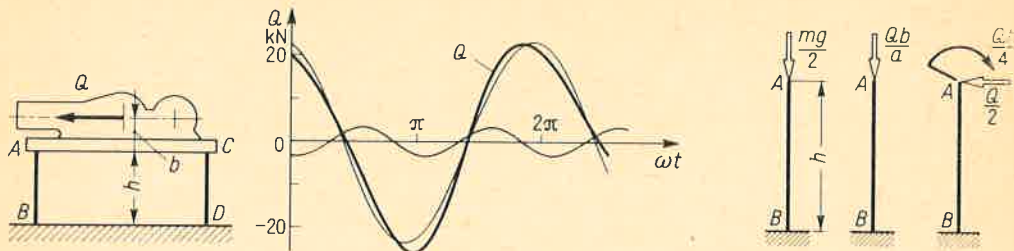
jako amplitudy sił poszczególnych harmonicznnych i ich przesunięcia fazowe. W rezultacie siła obciążająca jest

$$Q = 23,7 \sin (\omega t + 76,5^\circ) + 3,15 \sin (2\omega t - 76,5^\circ) \text{ kN},$$

a jej przebieg taki jak na rys. 16.19. Obciążenie każdego słupa stanowią: stała siła wzdłużna  $mg/2 = 2,45 \text{ kN}$ , pulsująca siła wzdłużna  $Qb/a$  wynikająca z odstępu  $b$  między linią działania  $Q$  a pozio-

mem  $AC$  oraz pulsująca siła poprzeczna  $T = Q/2$  i pulsujący moment  $Qh/4$ , odpowiadające obciążeniu statycznie niewyznaczalnego ustroju siłą  $Q$  przyłożoną w poziomie  $AC$ .

7. W zadaniach 1 ÷ 6 ten sam element pełni funkcje i tłumika, i sprężyny, tymczasem siłę działającą na niego określono z wzoru (16.18) słusznego, gdy te funkcje są rozdzielone. Jaki błąd popełnia się przy takiej zamianie modelu?



Rys. 16.19. Wynik rozwiązania zadania 6

Rozwiązanie. Wróćmy do rys. 16.2. Gdy ten sam element jest i sprężyną, i tłumikiem, wówczas przenosi on siłę  $P+H = Ku_A + c\dot{u}_A$ . Przyjmując  $Q = Q_1 \sin \omega t$  i  $u_A$  według (16.13) mamy teraz

$$P+H = Ka \sin(\omega t - \varphi) + c\omega a \cos(\omega t - \varphi),$$

a po wprowadzeniu z (16.3) parametrów  $\zeta$ ,  $\omega_n$  i przekształceniu

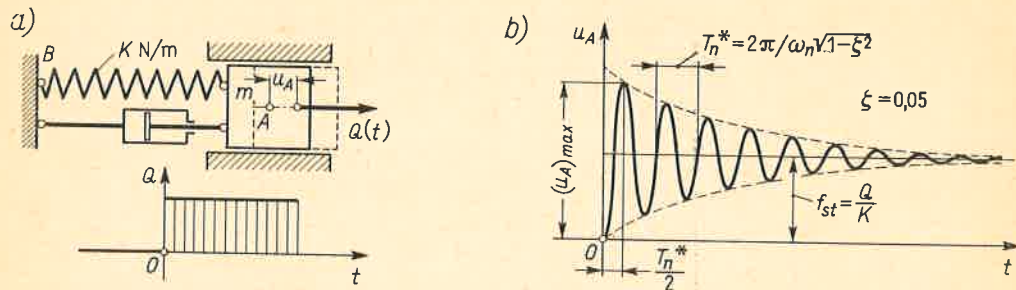
$$P+H = Ka\sqrt{1+4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2} \sin(\omega t - \varphi + \psi),$$

gdzie  $\tan \psi = 2\zeta\omega/\omega_n$ . Pomijając nieistotne przesunięcie fazowe  $\psi$  widzimy, że siła przenoszona przez badany element jest większa w stosunku  $\sqrt{1+4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}$ , niż podana wzorem (16.18). W ustrojach o małym tłumieniu popełniany błąd jest pomijalny, na przykład w zadaniu 6 dla podstawowej harmonicznej jest on około 0,9%, dla drugiej około 3,6%.

Powyższa poprawka siły nie zmienia uprzednio obliczonych wartości naprężeń, o ile przyjąć, że materiał składa się z dwóch istniejących obok siebie faz z jednej reagującej na odkształcenia (sprężystej) i drugiej reagującej na prędkość odkształcenia.

### 16.3. Działanie obciążeń nieokresowych

Analizę skutków takich obciążeń (rys. 16.1c) rozpoczniemy od zbadania zachowania się ustroju o jednym stopniu swobody przy nagłym zadziałaniu siły  $Q$  (rys. 16.20a). Za



Rys. 16.20. Reakcja ustroju przy nagłym obciążeniu siłą  $Q$

kładamy, że przed obciążeniem ustrój był w spoczynku, czyli że  $u_A = 0$  dla  $t < 0$ . Po obciążeniu, czyli dla  $t \geq 0$ , następuje ruch masy  $m$  opisany równaniem (16.4)

$$\ddot{u}_A + 2\zeta\omega_n\dot{u}_A + \omega_n^2 u_A = Q/m.$$

Rozwiązanie tego równania  $u_A(t)$  jest, jak zawsze, sumą

$$u_A(t) = u_{An} + u_{Aw},$$

gdzie  $u_{An}$  — rozwiązanie równania jednorodnego o postaci (16.6), a  $u_{Aw}$  — rozwiązanie szczególne. Gdy  $Q = \text{const}$ , wówczas

$$u_{Aw} = Q/m\omega_n^2 = Q/K = f_{st}, \quad (a)$$

gdzie  $f_{st}$  — przemieszczenie masy  $m$  odpowiadające statycznemu działaniu siły  $Q$ . Tak więc przy nagłym zadziałaniu siły  $Q$  ruch masy przedstawia drgania tłumione

$$u_A(t) = a_n e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2} + \varphi_n) + f_{st}. \quad (b)$$

Przesunięcie fazowe  $\varphi_n$  i amplitudę  $a_n$  wyznaczamy z warunków początkowych  $(u_A)_{t=0} = 0$ ,  $(\dot{u}_A)_{t=0} = 0$ , otrzymując

$$\tan \varphi_n = \sqrt{1-\zeta^2} / \zeta, \quad a_n = -f_{st} / \sin \varphi_n = -f_{st} / \sqrt{1-\zeta^2}. \quad (c)$$

Opisany zależnością (b) przebieg  $u_A(t)$  podaje rys. 16.20b. Widać, że po upływie pewnego czasu mamy  $u_A = f_{st} = \text{const}$ , a więc następuje równowaga ustroju w położeniu odpowiadającym statycznemu działaniu siły  $Q$ . W przejściowym jednak okresie chwilowe wartości  $u_A$  są większe niż  $f_{st}$ . Wartość  $(u_A)_{\max}$  występuje, gdy  $t = T_n^*/2$ , to znaczy po upływie czasu równego połowie okresu drgań własnych, i łatwo dowieść, że

$$(u_A)_{\max} = f_{st} (1 + e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}). \quad (d)$$

Wartości  $(u_A)_{\max}$  odpowiada siła  $P_{\max}$  w elemencie sprężystym

$$P_{\max} = K(u_A)_{\max} = Q(1 + e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}). \quad (e)$$

Przy małym tłumieniu, gdy  $\zeta < 0,03$ , można przyjąć, że

$$P_{\max} = 2Q. \quad (16.24)$$

Powyższą nieprzekraczalną wartością  $P_{\max}$  posługujemy się często przy oszacowaniu skutku nagłego obciążenia.

Podobnie badamy skutek obciążenia ustroju siłą chwilową  $Q$ , której czas działania  $\Delta t$  jest bardzo krótki, niemniej jej impuls

$$\bar{S} = \int_0^{\Delta t} Q dt \quad (f)$$

ma wartość skończoną. Opis ruchu masy  $m$  można tu podzielić na dwie fazy. W pierwszej trwającej przez czas  $\Delta t$  przesunięcie  $u_A$  jest bardzo małe, czyli że  $u_A \approx 0$ , występuje natomiast raptowny wzrost prędkości do wartości  $\dot{u}_{A0}$  określonej z zasady zachowania pędu, a mianowicie

$$m\dot{u}_{A0} = \bar{S} \quad \text{lub} \quad \dot{u}_{A0} = \bar{S}/m. \quad (g)$$



Tę wartość  $\dot{u}_{A0}$  i  $u_{A0} = 0$  przyjmujemy jako początkowe dla drugiej fazy, gdy  $t > \Delta t$  i  $Q \equiv 0$ , a ruch jest opisany rozwiązaniem (16.6) jednorodnego równania (16.4), czyli

$$u_A = a_n e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2} + \varphi_n).$$

Wykorzystując wspomniane warunki początkowe wyznaczamy

$$\varphi_n = 0, \quad a_n = \bar{S}/m \omega_n \sqrt{1-\zeta^2},$$

otrzymując ostatecznie zależność

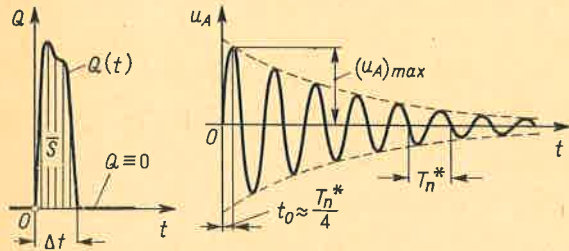
$$u_A = (\bar{S}/m \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}) e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}. \quad (h)$$

Przebieg  $u_A(t)$  podaje rys. 16.21. Ekstremalne przemieszczenie  $(u_A)_{\max}$  odpowiada chwili  $t_0$  określonej z równania

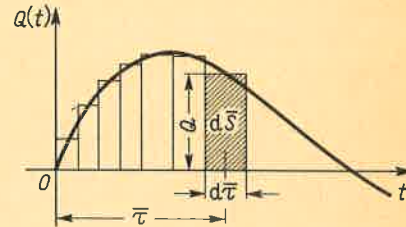
$$\operatorname{tg} \omega_n t_0 \sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{1-\zeta^2}/\zeta, \quad (i)$$

a jego wartość

$$(u_A)_{\max} = (\bar{S}/m \omega_n) e^{-\zeta \omega_n t_0}. \quad (j)$$



Rys. 16.21. Reakcja ustroju przy obciążeniu siłą chwilową



Rys. 16.22. Rozkład dowolnego obciążenia na elementarne impulsy

W większości przypadków tłumienie jest małe i wtedy z wzoru (i) mamy  $\omega_n t_0 \approx \pi/2$ , a z wzoru (j)

$$(u_A)_{\max} \approx (\bar{S}/m \omega_n) e^{-\pi \zeta/2}. \quad (k)$$

Odpowiadająca  $(u_A)_{\max}$  siła  $P_{\max}$  w elemencie sprężystym

$$P_{\max} = K (u_A)_{\max} \approx \bar{S} \omega_n e^{-\pi \zeta/2} \quad (16.25)$$

nie przekracza nigdy wartości  $\bar{S} \omega_n$ .

Rozwiązanie (h) można zastosować, gdy siła  $Q(t)$  ma przebieg dowolny (rys. 16.22). W tym celu nadajemy wynikowi (h) postać

$$u_A = \bar{S} h(t), \quad (l)$$

gdzie  $h(t)$  jest reakcją ustroju wywołaną impulsem jednostkowym. Jeśli taki impuls działa nie w chwili  $t = 0$ , lecz w chwili  $t = \bar{\tau}$ , to ruch ustroju określa funkcja  $h(t - \bar{\tau})$ , czyli

$$h(t - \bar{\tau}) = (1/m \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}) e^{-\zeta \omega_n (t - \bar{\tau})} \sin \omega_n (t - \bar{\tau}) \sqrt{1-\zeta^2}, \quad (16.26)$$

przy czym dla  $t < \bar{\tau}$  funkcja  $h(t - \bar{\tau}) \equiv 0$ . Zamieniając z kolei rzeczywisty przebieg  $Q(t)$  krzywą schodkową, można potraktować ją jako szereg elementarnych impulsów  $d\bar{S} = Q d\bar{\tau}$  ulokowanych w czasie  $t = \bar{\tau}$ . Każdemu takiemu impulsowi wziętemu z osobna odpowiada reakcja (ruch) ustroju

$$Q d\bar{\tau} h(t - \bar{\tau}), \quad (m)$$

a całkowita reakcja ustroju jest, z racji liniowości równania (16.4), sumą składników (m) dla  $\bar{\tau}$  w granicach 0,  $t$ , czyli

$$u_A(t) = \int_0^t Q(\bar{\tau}) h(t - \bar{\tau}) d\bar{\tau}. \quad (16.27)$$

Wprowadzając jako nową zmienną  $t^* = t - \bar{\tau}$  nadajemy wynikowi (16.27) drugą równoważną postać

$$u_A(t) = \int_0^t Q(t - t^*) h(t^*) dt^*. \quad (16.28)$$

W przypadku wymuszenia kinematycznego (rys. 16.13), gdy punkt  $B$  doznaje przemieszczenia  $u_B(t)$ , otrzymujemy te same zależności (16.27) i (16.28), z tym tylko, że przesunięcie  $u_A$  i siła  $Q$  zostają odpowiednio zastąpione przez  $u_{AB} = u_A - u_B$  i  $-m\ddot{u}_B$ .

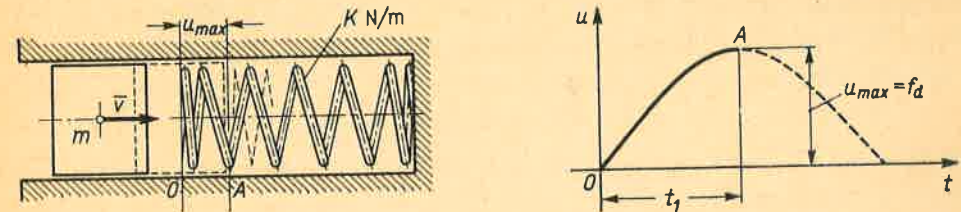
Jednym z zastosowań wzorów (16.27) lub (16.28) jest badanie reakcji ustroju na wymuszenie przypadkowe. Załóżmy, że podany na rys. 16.1a przebieg jest otrzymanym doświadczalnie zapisem wymuszeń, na przykład nierówności drogi, po której jedzie samochód. Stosując wzór (16.27) określamy odkształcenie  $u_{AB}(t)$ , a więc i siłę  $P(t)$  działającą na element sprężysty (resory), przy czym cały proces obliczeń można przerzucić na maszynę. Do tego celu nadają się specjalnie tzw. maszyny analogowe umożliwiające wizualną obserwację przebiegu oraz liczbową rejestrację częstości występowania sił  $P(t)$  o zadanych z góry wartościach.

Z podanych przykładów widać, że przy obciążeniach nagłych lub chwilowych występują zawsze drgania swobodne tłumione, a więc proces ma charakter nieustalony, gdyż amplituda zmienia się w czasie. Jest to zasadnicza różnica w porównaniu z działaniem obciążeń okresowych, przy których, po zamarcu drgań własnych, amplituda jest stała, a proces ustalony.

## 16.4. Przybliżona teoria zjawisk uderzenia

Opisana poprzednio pełna analiza zjawisk przy działaniu obciążeń nagłych lub chwilowych nie zawsze jest potrzebna. W wielu przypadkach interesuje nas tylko maksymalna wartość siły działającej w trakcie procesu na sprężysty element ustroju, jako decydująca o jego bezpieczeństwie. Pozostałe fakty, jak tłumiony charakter ruchu, przyjmujemy tylko od strony jakościowej. Przy postawieniu tak zawężonego celu upraszczamy dodatkowo zadanie zakładając, że ustrój nie ma tłumienia. Założenie to, jak widzieliśmy, daje wartości siły większe od rzeczywistych, a więc w kierunku zwiększenia pewności ustroju.

Metoda rozwiązania takich zawężonych zadań wynika z rozważań przemian i bilansu energii. Dla przykładu weźmy układ (rys. 16.23), w którym poruszająca się z prędkością  $\bar{v}$



Rys. 16.23. Badanie procesu uderzenia



masa  $m$  uderza w nieważki element sprężysty o stałej  $K$ . Po zetknięciu się z elementem sprężystym prędkość masy stopniowo maleje na skutek rosnącej w nim siły i w chwili  $t = t_1$  jest ona równa zeru, a odkształcenie  $u$  osiąga wartość maksymalną  $u = f_d$ . Procesowi temu towarzyszy przemiana energii z kinetycznej w potencjalną. W chwili bowiem zetknięcia, gdy element sprężysty jest jeszcze nie odkształcony, istnieje tylko energia kinetyczna masy  $m$

$$E_k = m\bar{v}^2/2, \quad (a)$$

w chwili zaś  $t = t_1$  tylko energia potencjalna odkształconego elementu

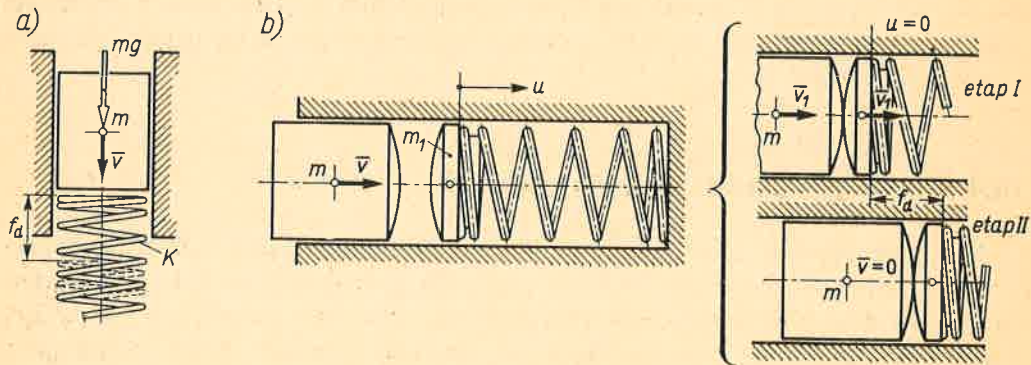
$$U = Kf_d^2/2. \quad (b)$$

Ponieważ badany układ jest idealny, zatem z zasady zachowania energii wynika  $E_k = U$ , a po uwzględnieniu zależności (a) i (b)

$$f_d = \bar{v} \sqrt{m/K} = \bar{v}/\omega_n, \quad (16.29)$$

gdzie  $\omega_n = \sqrt{K/m}$  — znana z art. 16.1 pulsacja nietłumionych drgań własnych układu złożonego z masy  $m$  i elementu sprężystego. Odpowiadająca  $f_d$  maksymalna siła  $P_{\max}$  w elemencie sprężystym

$$P_{\max} = Kf_d = \bar{v} \sqrt{Km}. \quad (16.30)$$



Rys. 16.24. Inne przypadki uderzenia

Gdy masa  $m$  uderzająca w sprężynę porusza się pionowo (rys. 16.24a), wówczas w bilansie energetycznym należy uwzględnić nie tylko energię kinetyczną  $E_k = m\bar{v}^2/2$  odpowiadającą momentowi zetknięcia się masy ze sprężyną, lecz także zmianę energii potencjalnej ciężaru  $mg$  na przesunięciu  $u_{\max} = f_d$ , czyli  $E_p = mgf_d$ . Rozumując jak poprzednio dochodzimy do równania  $E_k + E_p = U$ , które po wykorzystaniu zależności (b) i przekształceniach ma postać

$$f_d^2 - 2f_{st}f_d - 2(E_k/K) = 0, \quad (c)$$

gdzie  $f_{st} = mg/K$  — odkształcenie elementu sprężystego przy statycznym działaniu ciężaru masy  $m$ . Z równania (c) wynika

$$f_d = f_{st} [1 + \sqrt{1 + (2E_k/Kf_{st}^2)}], \quad (16.31)$$

jako wartość tzw. *strzałki dynamicznej*  $f_d$ . Odpowiadającą jej siłę  $P_{\max} = Kf_d$  w elemencie sprężystym można wyrazić jako

$$P_{\max} = mg \beta_u, \quad (16.32)$$

gdzie  $\beta_u = f_d/f_{st}$  — stosunek odkształceń: dynamicznego i statycznego. Z wzoru (16.31) widać, że  $\beta_u \geq 2$ , przy czym dolna wartość  $\beta_u = 2$  zachodzi, gdy  $E_k = 0$  i  $\bar{v} = 0$ , czyli gdy siła ciężkości  $mg$  działa nagle. Wynik ten zgadza się z poprzednim rezultatem (16.24).

Zazwyczaj masa  $m$  nie uderza bezpośrednio w element sprężysty, lecz poprzez przytwierdzoną do niego masę  $m_1$  (rys. 16.24b). Przebieg zjawiska dzieli się tu na dwa etapy. W pierwszym z nich trwającym niezmiernie krótko zachodzi wyrównanie prędkości mas  $m$  i  $m_1$ . Z zasady zachowania pędu wynika, że ta wspólna prędkość

$$\bar{v}_1 = m\bar{v}/(m + m_1). \quad (d)$$

Temu wyrównaniu prędkości towarzyszą odkształcenia zlokalizowane głównie w miejscu styku ciał. Jeśli założyć, że odkształcenia te są plastyczne, to obydwie masy zostają w zetknięciu i poruszają się z tą samą prędkością  $\bar{v}_1$ . Ich energia kinetyczna

$$E'_k = (m + m_1) \bar{v}_1^2/2 = (m\bar{v}^2/2) [m/(m + m_1)] = E_k m/(m + m_1) \quad (e)$$

jest mniejsza od początkowej energii masy  $m$ , gdyż energia ta została częściowo zużyta na plastyczne odkształcenie materiału.

Po wyrównaniu prędkości mas zaczyna się drugi etap przebiegu nie różniący się niczym<sup>(1)</sup> od przypadku z rys. 16.23. Wstawiając zatem do wzorów (16.29) i (16.30) prędkość  $\bar{v}_1$  i masę  $m + m_1$  otrzymujemy odpowiednio

$$f_d = \bar{v} \sqrt{\frac{m}{K}} \sqrt{\frac{m}{m + m_1}}, \quad P_{\max} = \bar{v} \sqrt{Km} \sqrt{\frac{m}{m + m_1}}. \quad (16.33)$$

W porównaniu zatem z poprzednimi wynikami następuje tu redukcja odkształcenia i siły w stosunku  $\sqrt{m/(m + m_1)}$ . Wynik ten jest słuszny przy poprzednim założeniu o idealnie plastycznym przebiegu pierwszego etapu. W przypadku gdy lokalne odkształcenia są częściowo lub całkowicie sprężyste, przebieg zjawiska jest znacznie bardziej złożony, a jego analiza wymaga pełnego zbadania w sposób podany w art. 16.3. Ogólnie biorąc redukcja wartości  $f_d$  i  $P_{\max}$  jest przy tym mniejsza niż w przypadku idealnie plastycznym.

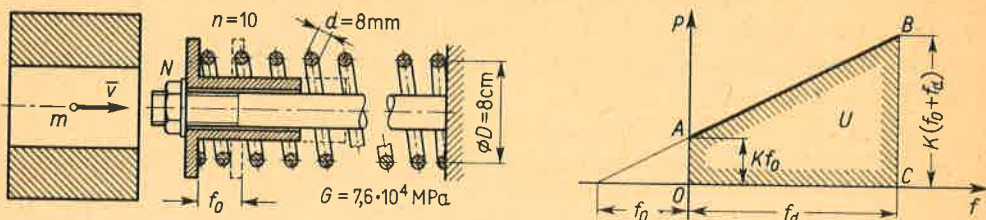
We wszystkich badanych przypadkach wartość siły  $P_{\max}$  rośnie ze wzrostem sztywności  $K$  elementu sprężystego. Dla zmniejszenia zatem tej siły należy stosować elementy o podatności zwiększonej bądź przez odpowiednie ich ukształtowanie, bądź przez „szeregowe” włączenie dodatkowego elementu, jak gumowe podkładki, „miękkie” sprężyny itp. (rys. 16.14). Podobnie jak w przypadku badania drgań, element sprężysty może mieć różną postać (rys. 16.4), przy czym określenie stałej  $K$  podlega tym samym regułom, jak opisano w art. 16.1.

<sup>(1)</sup> Z racji krótkotrwałości poprzedniego etapu na początku drugiego etapu element sprężysty nie jest jeszcze odkształcony.



**Zadania**

1. W nieważkim zespole złożonym z talerzyka i sprężyny (rys. 16.25) można nakrętką  $N$  wywołać wstępne napięcie sprężyny. Obliczyć naprężenia w sprężynie przy uderzeniu jej masą  $m = 5$  kg poruszającą się z prędkością  $\bar{v} = 2$  m/s, jeśli: a) sprężyna nie jest napięta; b) sprężynę ściśnięto wstępnie o  $f_0 = 3$  cm.



Rys. 16.25. Do zadania 1

Rozwiązanie. W przypadku a) po obliczeniu z wzoru (9.15) stałej  $K = Gd^4/8nD^3 = 7,6$  kN/m otrzymujemy z wzoru (16.30)  $P_{max} = 390$  N, a według wzoru (9.14)  $\tau_{max} \approx 178$  MPa.

W przypadku b) energia  $U$  odpowiadająca strzałce dynamicznej  $f_d$ , mierzonej od położenia talerzyka przy wstępnym napięciu  $f_0$ , jest z jednej strony równa polu trapezu  $OABC$ , czyli

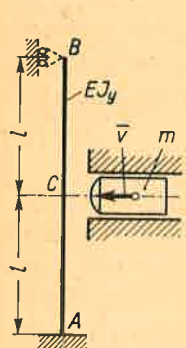
$$U = [K(f_0 + f_d)^2/2] - (Kf_0^2/2),$$

z drugiej zaś strony równa się energii kinetycznej  $E_k = m\bar{v}^2/2$  uderzającej masy. Z równości  $U = E_k$  mamy

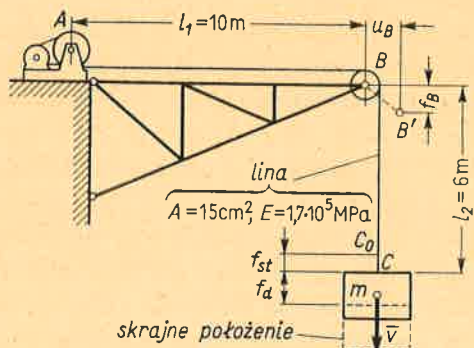
$$f_d + f_0 = f_0 \sqrt{1 + (2E_k/Kf_0^2)} = 5,93 \text{ cm},$$

jako całkowite odkształcenie sprężyny mierzone od położenia sprężyny w stanie swobodnym. Odpowiadająca siła  $P'_{max} = K(f_0 + f_d) = 451$  N jest 1,16 razy większa niż poprzednio i w tym też stosunku rosną naprężenia  $\tau'_{max} = 1,16$ ,  $\tau_{max} \approx 207$  MPa.

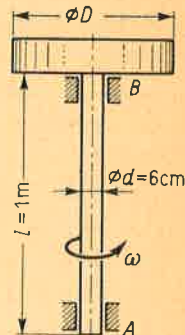
2. Masa  $m$  uderza z prędkością  $\bar{v}$  wspornik  $AB$  w punkcie  $C$  (rys. 16.26) wywołując w niebezpiecznym przekroju  $A$  naprężenia  $\sigma_{max} = 200$  MPa. Jak zmieniają się te naprężenia, jeśli podeprzeć przegubowo koniec  $B$ ?



Rys. 16.26.



Rys. 16.27. Do zadania 3



Rys. 16.28.

Odp. W pierwszym przypadku  $K' = 3EJ_y/l^3$ ,  $P'_{max} = \bar{v} \sqrt{3EJ_y m/l^3}$  i  $M'_g = P_{max} l = \bar{v} \sqrt{3EJ_y l}$ ; w drugim  $K'' = 96EJ_y/l^3$ ,  $P''_{max} = \bar{v} \sqrt{K'' m}$ , maksymalny moment jest nadal w przekroju  $A$  (rys. 10.14) i ma wartość  $M''_g = 3P''_{max} l/8 = \bar{v} \sqrt{27EJ_y l/14}$ . Stosunek naprężeń jest  $M''_g/M'_g = \sqrt{9/14}$ , skąd  $\sigma''_{max} \approx 160$  MPa.

3. Lina  $ABC$  przerzucona przez blok w węźle  $B$  kratownicy dźwiga ciężar masy  $m = 3 \cdot 10^3$  kg (rys. 16.27). W trakcie opuszczania tej masy ze stałą prędkością  $\bar{v} = 1$  m/s nastąpiło w sytuacji podanej na rysunku nagłe zablokowanie wciągarki  $A$ . Wiedząc, że statycznemu działaniu ciężaru masy  $m$  odpowiadają przesunięcia  $u_B = 1$  cm,  $f_B = 3$  cm węzła  $B$  i traktując wysięgnik jako nieważki określić ekstremalną siłę w linie.

Rozwiązanie. Zadanie różni się od modelu z rys. 16.24a, gdyż w momencie zablokowania (punkt  $C$ ) sprężysty element układu (lina + wysięgnik) jest już napięty siłą  $mg$ . Jeśli mierzyć strzałkę dynamiczną  $f_d$  od momentu zablokowania, to suma  $E_k + E_p = (m\bar{v}^2/2) + mgf_d$ . Inna natomiast jest energia odkształcenia

$$U = [K(f_d + f_{st})^2/2] - (Kf_{st}^2/2) = K(f_d^2 + 2f_d f_{st})/2,$$

gdzie  $f_{st} = mg/K$  – przesunięcie punktu  $C$  przy statycznym działaniu  $mg$

$$f_{st} = f_B - u_B + [mg(l_1 + l_2)/EA] = 3,85 \text{ cm}.$$

Z równości  $E_p + E_k = U$  mamy  $f_d = \bar{v} \sqrt{m/K}$  oraz

$$P_{max} = K(f_d + f_{st}) = (\bar{v} \sqrt{Km}) + mg = 77,2 \text{ kN},$$

gdź  $K = mg/f_{st} = 3 \cdot 10^3 \cdot 9,81/3,85 \cdot 10^{-2} = 7,64 \cdot 10^5$  N/m. Tak więc raptowne zakleszczenie zwiększa obciążenie ustroju 2,6 razy.

4. Jaki sens techniczny w zagadnieniach uderzenia ma wynik zadania 4 art. 2.4 (rys. 2.13)?

Odp. Jeśli na swobodny koniec pręta uderza masa  $m$  z prędkością  $\bar{v}$ , to naprężenie w niebezpiecznym przekroju pręta stopniowanego będzie większe niż w przecie gładkim.

5. Wałek  $AB$  z osadzoną na nim tarczą o średnicy  $D = 30$  cm i masie  $m = 60$  kg wiruje z prędkością  $\bar{n} = 120$  obr/min (rys. 16.28). Określić wartości maksymalnych naprężeń stycznych w wałku przy raptownym zablokowaniu końca  $A$ . Moduł  $G = 7,8 \cdot 10^4$  MPa.

Rozwiązanie. Pomijając masę wałka określamy energię kinetyczną w stanie początkowym. Jej wartość

$$E_k = I\omega^2/2 = 53,2 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 = 53,2 \text{ J},$$

gdzie  $I = mD^2/8 = 0,675$  kgm<sup>2</sup> – moment bezwładności tarczy, a  $\omega = \pi\bar{n}/30 = 12,56$  rad/s – jej prędkość kątowa. Po zablokowaniu energia ta zamienia się na energię odkształcenia

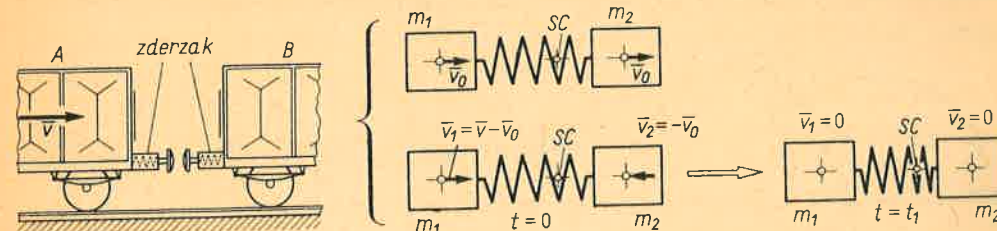
$$U = (M_s)_{max}(\varphi)_{max}/2 = (M_s)_{max}^2 l/2GJ_0,$$

skąd maksymalna wartość momentu skręcającego

$$(M_s)_{max} = \sqrt{2E_k GJ_0/l} = 3,24 \text{ kNm},$$

a odpowiadające naprężenia  $\tau_{max} = (M_s)_{max}/W_0 \approx 76$  MPa.

6. Biegący z prędkością  $\bar{v} = 2$  m/s wagon  $A$  o masie  $m_1 = 40 \cdot 10^3$  kg uderza zderzakami w zderzaki nieruchomego wagonu  $B$  o masie  $m_2 = 20 \cdot 10^3$  kg (rys. 16.29). Określić maksymalną siłę w zderzaku, jeśli  $K = 3$  MN/m dla każdego z dwóch zderzaków każdego wagonu.



Rys. 16.29. Zderzenie mas rozdzielonych elementem sprężystym



Rozwiązanie. Licząc od momentu zetknięcia ( $t = 0$ ) i traktując obie masy jako całość, można ich ruch opisać jako złożenie dwóch ruchów. Pierwszy z nich to ruch obu mas z tą samą prędkością

$$\bar{v}_0 = m_1 \bar{v} / (m_1 + m_2),$$

określoną z zasady zachowania pędu. Ponieważ w tym ruchu odległość mas zostaje taka, jak w chwili zetknięcia, zatem odpowiadająca temu siła w zderzakach jest przez cały czas równa zero. W drugim ruchu składowym, w którym prędkości mas dla  $t = 0$  są

$$\bar{v}_1 = \bar{v} - \bar{v}_0 = m_2 \bar{v} / (m_1 + m_2), \quad \bar{v}_2 = -\bar{v}_0 = -m_1 \bar{v} / (m_1 + m_2),$$

środek mas  $SC$  jest w spoczynku, a całkowity pęd zawsze równy zero. Odległość mas jest tu zmienna od największej w chwili  $t = 0$ , do najmniejszej w chwili  $t = t_1$ , gdy prędkości  $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$ . Tej chwili  $t = t_1$  odpowiada największe ściśnięcie  $f_d$  zderzaków i największa w nich siła. Ponieważ przy szeregowym połączeniu dwóch równoległych par zderzaków łączna stała sprężysta jest  $K$ , jak dla pojedynczego zderzaka, zatem energia odkształcenia

$$U = Kf_d^2/2.$$

Energia ta wynika z przemiany energii kinetycznej

$$E_k = (m_1 \bar{v}_1^2/2) + (m_2 \bar{v}_2^2/2) = m_1 m_2 \bar{v}^2 / 2 (m_1 + m_2)$$

odpowiadającej chwili  $t = 0$ . Porównując  $E_k$  i  $U$  mamy

$$f_d = \bar{v} \sqrt{m_1 m_2 / K (m_1 + m_2)} = 0,133 \text{ m}$$

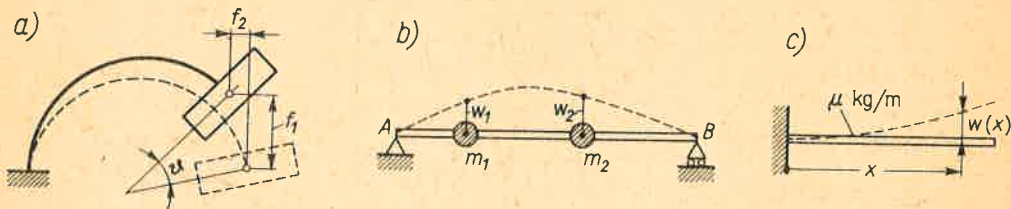
oraz maksymalną siłę w każdym ze zderzaków

$$P_{\max} = Kf_d/2 = 200 \text{ kN}.$$

## 16.5. Uwagi końcowe

Podana w tym rozdziale analiza reakcji ustroju przy obciążeniach zmiennych stanowi jedynie drobny fragment odrębnej dyscypliny, tzw. dynamiki maszyn, łączącej w sobie elementy mechaniki i wytrzymałości materiałów. Tymi elementami mechaniki są równania ruchu Newtona lub Lagrange'a, elementami zaś wytrzymałości materiałów określenie parametrów wyjściowych, jak sztywności elementów i tłumienia materiałowego. W wyniku rozwiązania takich zagadnień otrzymuje się nie tylko informacje o przebiegu ruchu, lecz i dane do oceny bezpieczeństwa ustroju.

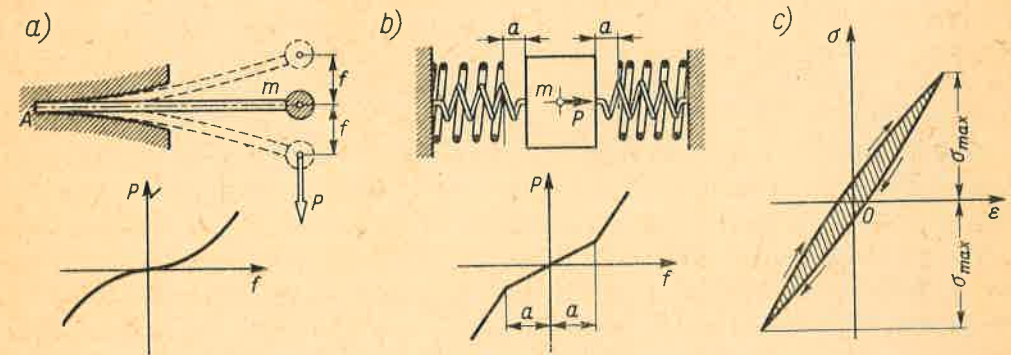
W porównaniu z rozpatrzonymi zagadnieniami spotykane w praktyce są często bardziej złożone z kilku powodów. Pierwszym z nich jest większa od jedności liczba parametrów potrzebnych do określenia położenia mas ustroju. Dla przykładu, w przypadku z rys. 16.30a położenie masy  $m$  określają trzy współrzędne, tj. przesunięcie pionowe  $f_1$ , poziome  $f_2$



Rys. 16.30. Przykłady ustrojów o wielu stopniach swobody

i kąt obrotu  $\theta$ . Podobnie w belce z dwiema masami (rys. 16.30b) położenie ich dają dwie współrzędne  $w_1$  i  $w_2$ . Cechą charakterystyczną takich ustrojów jest to, że odpowiednio do liczby tych współrzędnych, tzw. *stopni swobody*, ustrój ma tyleż, na ogół różnych, pulsacji  $\omega_n$  drgań własnych. W granicznym przypadku ustroju z masą rozłożoną w sposób ciągły (rys. 16.30c) do określenia położenia wszystkich elementarnych mas musimy podać funkcję  $w(x)$ , równoważną nieskończeniu wielu współrzędnych, którym odpowiada nieskończenie wiele pulsacji  $\omega_n$ . Określenie pulsacji  $\omega_n$  i odpowiadających im postaci drgań własnych nasuwa niejednokrotnie duże trudności rachunkowe.

Drugim powodem komplikacji jest nieliniowość parametrów sztywności i tłumienia. Pierwsza z nich może wynikać z ukształtowania elementu, jak w przypadku z rys. 16.31a,



Rys. 16.31. Przykłady nieliniowości układów

gdy wspornik utwierdzony w przekroju  $A$  ma dodatkowe prowadnice skracające czynną długość wspornika przy jego wygięciu. Podobnie w układzie z rys. 16.31b istnienie zewnętrznych sprężyn mających w stosunku do masy  $m$  luzu  $a$  powoduje, że charakterystyka  $P(f)$  jest łamana. Nieliniowość może tkwić i w samym materiale, gdy zależność  $\sigma(\epsilon)$  jest inna, niż podana prawem Hooke'a. Osobną kwestią jest tłumienie materiałowe. Jego przyczyną w zakresie naprężeń stosowanych w technice są, niezauważalne makroskopowo, odkształcenia plastyczne w obrębie poszczególnych ziarn materiału. Na skutek tego zależność  $\sigma(\epsilon)$  jest inna przy obciążeniu niż przy odciążaniu dając na wykresie  $\sigma(\epsilon)$  tzw. *pętlę histerezy* (rys. 16.31c). Jak dowodzą doświadczenia, wielkość tej pętli jest ta sama w warunkach statycznych i dynamicznych, zależy natomiast od amplitudy naprężenia. Wynikające stąd komplikacje rachunkowe omijamy wprowadzając zazwyczaj model układu z tłumieniem proporcjonalnym do prędkości, jak w art. 16.1. Wartość tłumienia w takim modelu zastępczym, określoną według (16.8) przez logarytmiczny dekrement tłumienia  $\delta$ , dobieramy przyrównując straty energii w rzeczywistym ustroju do straty energii w modelu zastępczym. Orientacyjne otrzymane z doświadczeń wartości tak określonego dekrementu  $\delta$  podaje tabl. 16.1. Jak widać, wartości  $\delta$  dla materiałów jak stal są bardzo małe (rzędu  $3 \div 8 \cdot 10^{-3}$ ). Wyjątek stanowi żeliwo szare, w którym niejednorodna struktura (grafit + ferryt) powoduje, że  $\delta$  jest kilkanaście razy większe. Wynika stąd, że w warunkach rezonansu parametr  $\beta_Q$  charakteryzujący „przekładnię” między siłą wymuszającą a wywołanym skutkiem może być rzędu kilkuset (wzór 16.15). Lepsza pod



Tablica 16.1

Rodzaj materiału lub ustroju	$\delta$
stale różnych gatunków	0,003 ÷ 0,008
nikiel techniczny	0,015
mosiądz w stanie utwardzonym	0,005
żeliwo szare	0,115
konstrukcje stalowe spawane	0,07 ÷ 0,08
konstrukcje duralowe nitowane	0,10 ÷ 0,12

tym względem jest sytuacja w ustrojach, w których nieuniknione złącza (śruby, nity itp.) powodują znaczne rozpraszanie energii na skutek mikroprzesunięć między łączonymi elementami. Niemniej i w tym przypadku należy liczyć się z wartościami  $\beta_0$  rzędu kilkunastu do kilkudziesięciu.

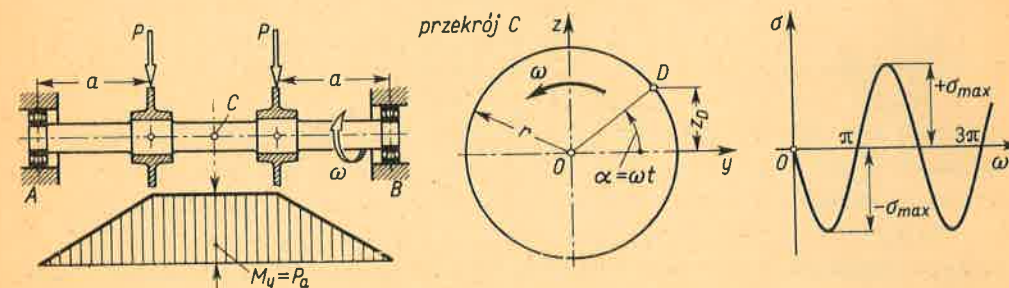
Nieliniowość parametrów sztywności i tłumienia może być przyczyną zjawiska tzw. *drgań samowzbudnych*. W odróżnieniu od badanych w tym rozdziale zjawisk, których przyczyną było zawsze obciążenie zmienne w czasie, drgania samowzbudne mogą powstać przy stałym obciążeniu. Przykładem takich drgań samowzbudnych są giętno-skrętne drgania skrzydeł płatowców i łopatek turbin, tzw. „wężykowanie” wózków pojazdów szynowych i wiele innych. Zjawiska te mogą, podobnie jak rozpatrzone, wpływać na bezpieczeństwo ustrojów.

## 17 ZMĘCZENIE MATERIAŁÓW

Analiza działania obciążeń zmiennych na ustrój dzieli się na dwa etapy, z których pierwszy, omówiony w poprzednim rozdziale, polega na wyznaczeniu wartości oddziaływań między elementami ustroju. Osobną kwestią jest określenie, jak reaguje sam materiał na działanie naprężeń zmiennych w czasie. Należy tu zauważyć, że przyczyną zmienności naprężeń może być nie tylko zmienność obciążeń, lecz i zmiana położenia elementu, jak w przypadku wałka wirującego z prędkością kątową  $\omega$  (rys. 17.1). Działające na wałek stałe siły  $P$  wywołują w badanym włóknie  $D$  przekroju  $C$  naprężenia

$$\sigma = -M_y z_D / J_y = -M_y r \sin \alpha / J_y = -(M_y r / J_y) \sin \omega t$$

oscylujące sinusoidalnie między wartościami  $\pm \sigma_{\max}$ .



Rys. 17.1. Przykład zmiennych naprężeń wywołanych zmianą położenia

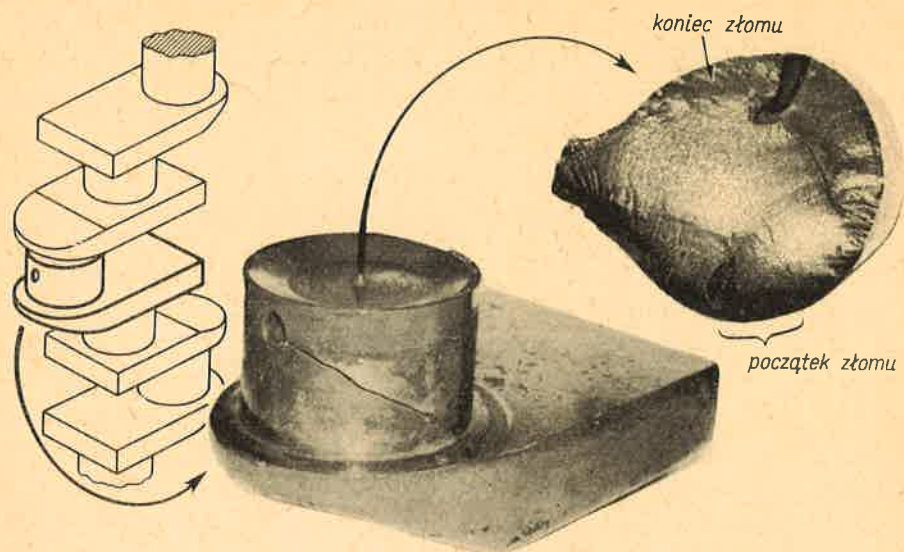
Podstawowym faktem stwierdzonym doświadczalnie jest, że przy działaniu takich naprężeń zmiennych pęknięcie elementu może nastąpić przy wartości  $\sigma_{\max}$  mniejszych nie tylko od granicy plastyczności materiału, lecz i od jego granicy sprężystości. Ten fakt drastycznego zmniejszenia wytrzymałości jest jednym z objawów zjawiska tzw. *zmęczenia materiału*. Zjawisko to jest czynnikiem decydującym o bezpieczeństwie, jak bowiem wynika z doświadczeń, jest ono przyczyną co najmniej 80% awarii maszyn.

### 17.1. Objawy i mechanizm zjawiska zmęczenia

Obserwowane przy działaniu zmiennych naprężeń osłabienie materiałów w szczególności metali było i jest nadal przedmiotem wielu badań i dociekań, często ze sobą sprzecznych. W takich warunkach pracy metal odporny jest tylko przez pewien okres czasu



przy obserwacji powierzchni wydaje się nie uszkodzony. W miarę jednakże powtarzania się dalszych obciążeń pojawiają się mikroskopowe pęknięcia, które następnie szybko rozszerzają się i gdy pęknięcie osiągnie dostateczną wielkość, następuje nagłe zniszczenie elementu. Złom zmęczeniowy (rys. 17.2) nawet w przypadku metali bardzo ciągliwych

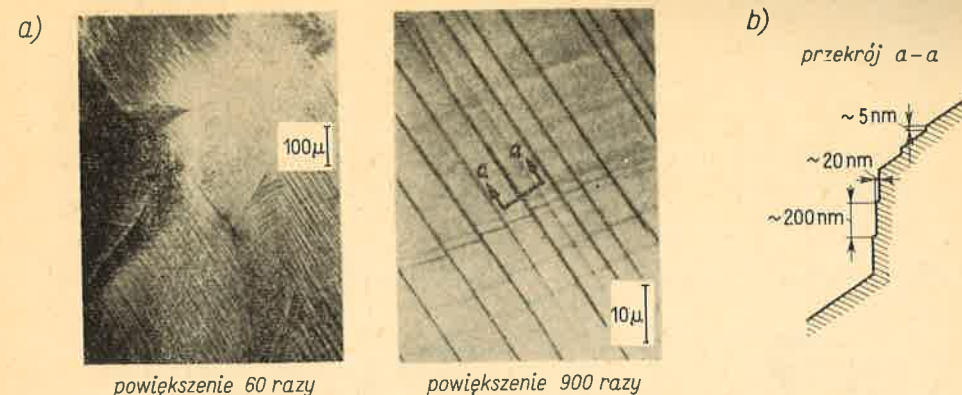


Rys. 17.2. Typowy obraz złomu zmęczeniowego

Przykład wału wykorbionego. Początek pęknięcia przy kanale smarowym w miejscu przejścia korby w czop korbowodu.

przypomina złom kruchy, gdyż nie wykazuje widocznych odkształceń plastycznych ani w części, ani w całości przekroju. Taka postać złomu nasuwała przypuszczenie, że w procesie zmęczenia zachodzi rekrytalizacja lub rozrost ziaren metalu wywołujące jego kruchość. Pogląd ten okazał się błędny. Wyjaśnienie różnicy zachowania się metali przy zmiennym obciążeniu tkwi w istocie zapoczątkowania pęknięcia zmęczeniowego i następującego potem rozwoju uszkodzenia po każdym następnym obciążeniu. W takim ujęciu proces zmęczenia należałoby prawidłowej nazwać *propagacją pęknięcia*.

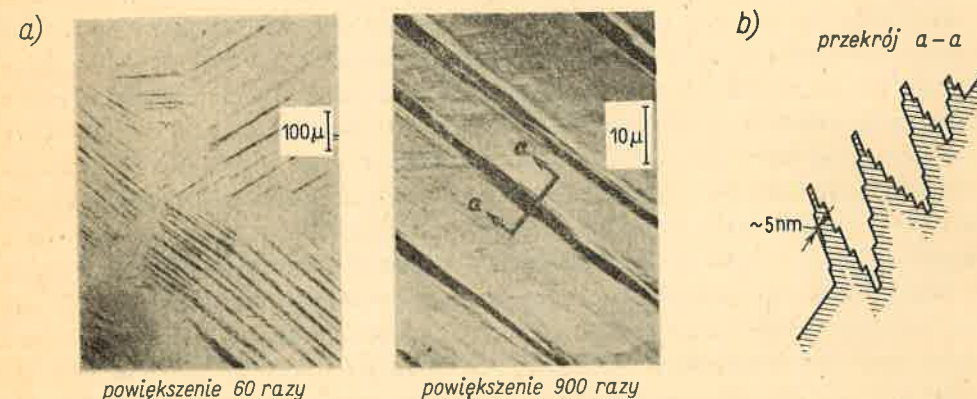
Interpretacja mechanizmu zmęczenia zależy od przyjętej skali obserwacji. Jeśli, równolegle do obserwacji makroskopowych, jako podstawę przyjąć zjawiska na skalę mikroskopu optycznego lub elektronowego, to najbardziej charakterystyczną cechą metali jest ich niejednorodność na skutek chaotycznego ustawienia i nieregularności kształtu krystalitów (rys. 17.3). Przy *statycznym obciążaniu* obserwuje się, że w obrębie poszczególnych ziarn występują odkształcenia trwale przejawiające się na powierzchni jako pasma poślizgu. Odpowiadające temu nominalne naprężenia są znacznie niższe od wartości, którą przyjmuje się jako granicę sprężystości polikrystalicznego materiału. Każde pasmo poślizgu przedstawia zdecydowany uskok pojedynczy lub złożony z pakietu cienkich warstewek o grubościach rzędu  $5 \text{ nm} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$  (rys. 17.3b). Przy większych naprężeniach wzrasta także wysokość uskoku. Taki „wysoki” uskok dochodząc do granicy ziarna przełamuje „barierę”, jaką ta granica stanowi i powoduje zmianę jej kształtu.



Rys. 17.3. Obraz poślizgów przy obciążeniu statycznym

Materiał: aluminium 99,99%. Zdjęcia z pracy P.J.E. Forsyth, *The Mechanism of Fatigue in Aluminum and Aluminum Alloys*, 1956.

Przy obciążeniach cyklicznych mniejszych od granicy plastyczności przebieg zjawisk jest inny. Występujące tu pasma poślizgu (rys. 17.4a) są szersze niż przy obciążeniu statycznym, a ich struktura przypomina bruzdy (rys. 17.4b). Przy zmianie bowiem znaku obciążenia



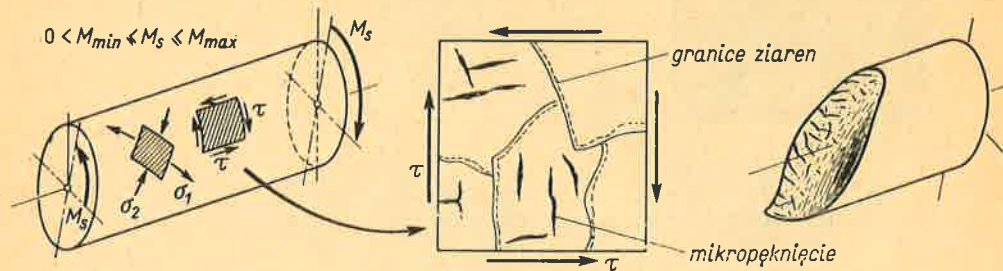
Rys. 17.4. Obraz poślizgów przy obciążeniu zmęczeniowym

Materiał: aluminium 99,99%. Zdjęcia z pracy P.J.E. Forsyth, *The Mechanism of Fatigue in Aluminum and Aluminum Alloys*, 1956

żenia istniejący poprzednio uskoki nie cofa się całkowicie, powstaje natomiast nowy poślizg w płaszczyźnie sąsiedniej. W miarę powtarzania się obciążeń bruzdy te zagłębiają się w materiał, kosztem wypchniętej na zewnątrz części materiału. Następstwem tego jest rozdrobnienie ziarna i rozluźnienie jego struktury dające w wyniku submikroskopowe pęknięcie. Jak stwierdzono przy użyciu mikroskopu elektronowego, pierwsze takie pęknięcia występują w bardzo wczesnej fazie procesu zmęczenia, rzędu tysięcznej części całkowitej trwałości (liczby cykli aż do całkowitego pęknięcia). W dalszym ciągu pęknięcia submikroskopowe wydłużają się i łączą się w grupy aż do wystąpienia pęknięcia mikroskopowego przechodzącego przez całe ziarno. Istotne jest przy tym, że średnio biorąc submikropęknięcia i mikropęknięcia jako związane z mechanizmem poślizgu pokrywają



się z kierunkiem maksymalnych naprężeń stycznych w danym miejscu ciała traktowanego jako jednorodne. W odróżnieniu od tego dalsze stadium pęknięcia, polegające na łączeniu się pęknięć ziarn poprzez bariery ich granic, przybiera stopniowo kierunek prostopadły do maksymalnego, a więc głównego, naprężenia rozciągającego. Dla przykładu w skręcanym wałku, gdy zmienne obciążenie nie zmienia znaku, w obrazie mikropęknięć dominuje kierunek poosiowy i obwodowy (rys. 17.5) odpowiadający kierunkom  $\tau_{\max}$ , koń-



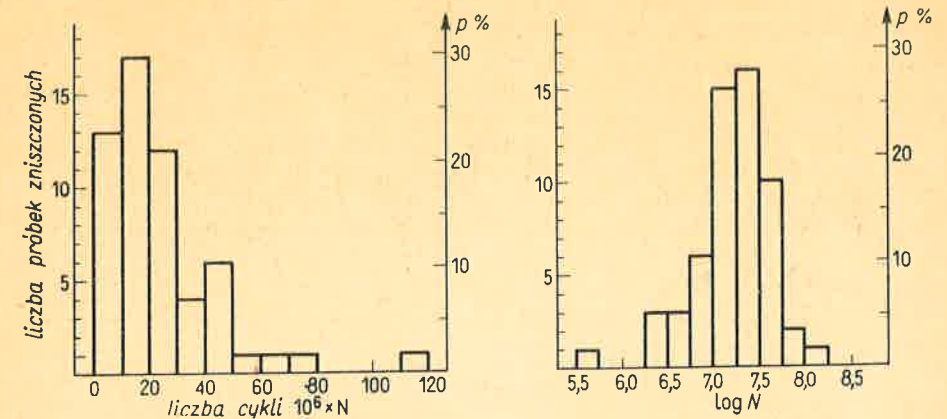
Rys. 17.5. Obraz mikropęknięć i ostatecznego złomu pręta skręcanego

cowy jednak złom przebiega z reguły po powierzchni śrubowej nachylonej do osi wałka pod kątem  $45^\circ$ . Ten przebieg zjawiska tłumaczy się wpływem mikroszczeliny na rozkład naprężeń w jej otoczeniu. Szczególnie niebezpiecznym miejscem jest czoło szczeliny, gdzie niezależnie od początkowego stanu naprężenia zachodzi duży lokalny wzrost wartości naprężeń normalnych  $\sigma_n$  powodujących w rezultacie pęknięcie rozdzielcze (rys. 8.11), pogłębiające się w miarę dalszych cykli obciążenia.

Pęknięcia zmęczeniowe tworzą się w zasadzie na powierzchni elementu, gdyż zewnętrzne ziarna są słabsze od wewnętrznych, stykających i wiążących się na wszystkich swych granicach z ziarnami sąsiednimi. W ziarnach zewnętrznych natomiast, mających jedną powierzchnię swobodną, istnieje zawsze zaburzenie układu atomów i osłabienie ich wiązań. Uwzględniając przy tym nieregularność kształtów, wymiarów i orientacji ziaren widzimy, że opisany powyżej mechanizm zniszczenia ma charakter statystyczny, zależy bowiem od losowego rozkładu słabszych kryształów i ich wzajemnego na siebie wpływu. Dlatego też techniczne pojęcie „wytrzymałości zmęczeniowej” ma sens jedynie jako prawdopodobieństwo pęknięcia po pewnej liczbie cykli obciążenia.

Ten ostatni fakt znajduje odbicie w wynikach prób. Biorąc bowiem serię jednakowych elementów jednakowo obciążonych i notując dla każdego elementu liczbę cykli  $N$  obciążenia, przy której nastąpiło zniszczenie, otrzymujemy wartości  $N$  różniące się często o rząd, a niekiedy i o dwa rzędy wielkości. Stosując pojęcia statystyki, wyniki takich prób przedstawiamy jako tzw. rozkłady częstości (rys. 17.6), w których wysokość  $p_i$  odpowiedniego słupka reprezentuje procentową liczbę sztuk zniszczonych w danym przedziale  $\Delta N_i$ . Wielokrotnie przy tym stwierdzono, że rozkład ten zbliża się do tzw. rozkładu normalnego (Gaussa)

$$p(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}, \quad (a)$$



Rys. 17.6. Przykład rozkładu częstości zniszczenia serii 57 sztuk próbek; stop Al-Zn

pod warunkiem, że jako zmienną  $x$  przyjmą nie samą liczbę cykli  $N$ , lecz jej logarytm, czyli  $x = \log N$ . (b)

Parametrami określającymi rozkład (a) jest wartość średnia  $m$  oraz odchyłka standardowa  $s$ . Ich znajomość umożliwia określenie prawdopodobieństwa, że element przetrzyma daną liczbę  $N$  cykli<sup>(1)</sup>.

Z podanego opisu wynika, że zjawisko zmęczenia jest uwarunkowane własnościami materiału w skali molekularnej i mikroskopowej. Z tego powodu stosowany dotychczas z powodzeniem model ciała jednorodnego nie nadaje się do stworzenia teorii zmęczenia. Z drugiej strony fizyka ciała stałego, a w szczególności teoria dyslokacji, tłumacząca zjawiska wytrzymałościowe od strony molekularnej, nie jest jeszcze dostatecznie rozwinięta. Stosowane w tej teorii wyidealizowane modele nie pozwalają prawidłowo interpretować zjawisk, jakie zachodzą w rzeczywistych materiałach przy zmiennych obciążeniach. W tej sytuacji wybieramy drogę półempiryczną. Zachowując mianowicie wszystkie przesłanki mechaniki ciała jednorodnego, gromadzimy jednocześnie fakty doświadczalne, na podstawie których formułujemy reguły umożliwiające przeprowadzenie praktycznych obliczeń. Jak już jednak wspomniano, obserwacje są często sprzeczne, wobec czego taka droga półempiryczna nie ma logicznej zwartości, a wyniki obliczeń są niepewne i niedokładne.

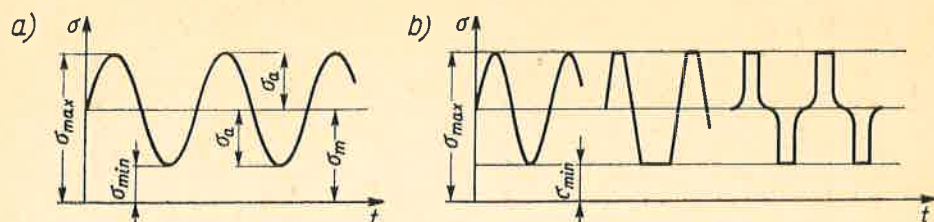
## 17.2. Ilościowe ujęcie zjawisk zmęczenia

Rozpocniemy od ustalenia parametrów określających cykl naprężenia. W przypadku prostego rozciągania, gdy przebieg  $\sigma(t)$  jest sinusoidalny (rys. 17.7a), cykl taki wyznaczają wartości maksymalnego  $\sigma_{\max}$  i minimalnego  $\sigma_{\min}$  naprężenia. Ponieważ tworzenie się poślizgów, a w następstwie i pęknięcia, zależy tylko od tych wartości skrajnych, przeto sposób przejścia między kolejnymi wartościami  $\sigma_{\max}$  i  $\sigma_{\min}$  nie ma znaczenia, o ile tylko

<sup>(1)</sup> Dalsze szczegóły podają specjalistyczne monografie, na przykład Z. Dyląg, Z. Orłóś, *Wytrzymałość zmęczeniowa materiałów*, Warszawa 1962, WNT.



przejście to jest monotoniczne. W tym ujęciu pokazane przykładowo cykle spełniające warunek monotoniczności (rys. 17.7b) są równorzędne. Ponadto okazuje się z doświadczeń, że w dużym zakresie ( $1 \div 200$  herców) prędkość zmian naprężenia nie ma istotnego wpływu.



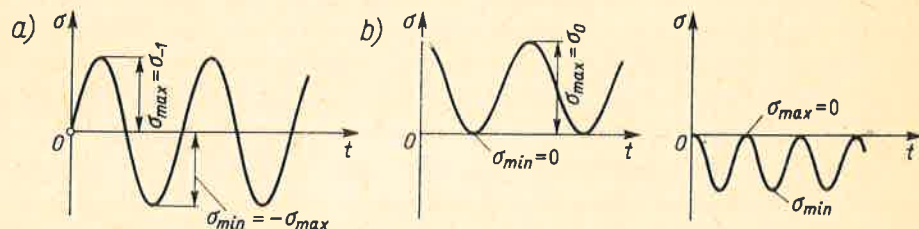
Rys. 17.7. Określenie parametrów cyklu naprężenia

Tak więc w ustalonych warunkach pracy parametrami do oceny procesu zmęczenia są tylko wartości  $\sigma_{max}$  i  $\sigma_{min}$  cyklu.

Wprowadzając współczynnik asymetrii cyklu

$$r = \sigma_{min} / \sigma_{max} \quad (17.1)$$

możemy w równorzędny sposób opisać cykl wartościami  $\sigma_{max}$  i  $r$ . I tak jeśli  $r = -1$ , to  $\sigma_{min} = -\sigma_{max}$ . Cykl taki (rys. 17.8a) nazywamy *symetrycznym* i oznaczamy umownie jako  $\sigma_{-1}$ , rozumiejąc przy tym, że  $\sigma = \sigma_{max}$ . Gdy  $r = 0$ , czyli gdy  $\sigma_{min} = 0$ , wówczas cykl nazywamy *pulsującym* (rys. 17.8b) i oznaczamy go przez  $\sigma_0$ . Cykle o jednakowej wartości  $r$ , a różnych  $\sigma_{max}$  nazywamy *podobnymi*.



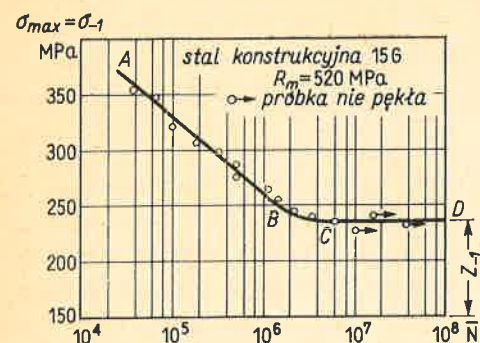
Rys. 17.8. Obraz cykli: symetrycznego i pulsujących

Cykl naprężenia można również przedstawić jako superpozycję stałego w czasie naprężenia średniego  $\sigma_m$  i cyklu symetrycznego o amplitudzie  $\sigma_a$  (rys. 17.7). Widać przy tym, że

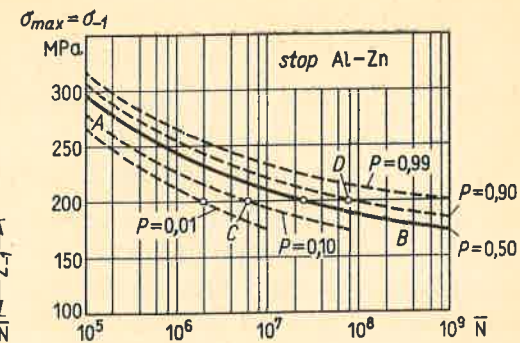
$$\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min}) / 2, \quad \sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2. \quad (17.2)$$

Punktem wyjścia analizy liczbowej są ustalane doświadczalnie własności zmęczeniowe materiałów. Badania takie przeprowadzamy na specjalnie ukształtowanych próbkach przy użyciu specjalnych maszyn realizujących określony typ cyklu, np. symetrycznego. Dla przykładu, szeroko stosowana jest próba tzw. zmęczenia giętnoobrotowego realizowana według schematu z rys. 17.1. Rolę wałka spełnia tu wymienna próbka o zmniejszonej średnicy w części środkowej, która przy danym schemacie obciążenia podlega czystemu zginaniu. Przy badaniu danej próbki ustalamy wartość  $\sigma_{max}$  i notujemy liczbę cykli  $N$ ,

która w tych warunkach spowoduje zniszczenie tej próbki. Nastawiając dla kolejnych próbek różne wartości  $\sigma_{max}$  otrzymujemy odpowiadające im liczby  $N$ . Z danych tych tworzymy wykres  $\sigma_{max}(N)$ , tzw. krzywą Wöhlera (rys. 17.9), przy czym dla większej jego zwartości odcięte  $N$  dajemy z reguły w skali logarytmicznej.



Rys. 17.9. Typowa krzywa Wöhlera dla stali Stal 15 G; Zmęczenie giętno-obrotowe



Rys. 17.10. Typowa krzywa Wöhlera dla stopów lekkich

Dla stali krzywa Wöhlera składa się zasadniczo z dwóch prostych odcinków złączonych krótkim krzywoliniowym przejściem w zakresie  $N_B = 0,6 \div 1,0 \cdot 10^6$  i  $N_C = 2 \div 5 \cdot 10^5$ . Pochyły odcinek  $AB$  określa wartości tzw. *wytrzymałości zmęczeniowej ograniczonej*, przy której badana próbka ulega zniszczeniu po skończonej liczbie cykli. Rzędna  $Z$  poziomego odcinka  $CD$  przedstawia tzw. *wytrzymałość zmęczeniową trwałą*, czyli taką ekstremalną wartość  $\sigma_{max}$  danego typu cyklu, przy której próbka może bez pęknięcia wytrzymać nieograniczoną liczbę zmian naprężenia. Zależnie przy tym od typu cyklu wprowadzamy przy  $Z$  wskaźnik  $r$  asymetrii cyklu, na przykład  $Z_{-1}$  dla cyklu symetrycznego,  $Z_0$  dla pulsującego itd. Uwzględniając, że poziomy odcinek  $CD$  zaczyna się na pewno dla  $N < 10^7$ , tę ostatnią wartość przyjmuje się jako praktyczne kryterium nieograniczonej trwałości próbki. Innymi słowy przyjmuje się, że próbka, która przetrzymała  $10^7$  zmian naprężenia, nie pęknie w ogóle.

Dla stopów lekkich krzywa Wöhlera  $AB$  (rys. 17.10) jest monotonicznie opadająca, przy czym ze wzrostem  $N$  maleje także gradient  $d\sigma_{max}/d(\log N)$ . Dla celów praktycznych ustala się tzw. *umowną wytrzymałość zmęczeniową* jako wartość  $\sigma_{max}$  cyklu dla  $N = 10^8$ .

Jak już wiemy w samej istocie procesu zmęczenia tkwi rozrzut trwałości (rys. 17.6). Z tego powodu dla wiarygodnego określenia zależności  $\sigma_{max}(N)$  potrzeba użyć dużo próbek ( $40 \div 60$ ) i wyniki opracować według zasad statystyki. W rezultacie otrzymuje się nie jedną krzywą Wöhlera, jak  $AB$  na rys. 17.10, lecz rodzinę krzywych odpowiadających danej wartości prawdopodobieństwa zniszczenia  $P$ . Dla przykładu, gdy  $\sigma_{max} = 200$  MPa i  $P = 0,10$ , wówczas  $N \approx 6 \cdot 10^6$  (punkt  $C$ ). Oznacza to, że statystycznie biorąc na 10 próbek jedna nie przetrzyma  $6 \cdot 10^6$  zmian naprężenia. Na tymże poziomie  $\sigma_{max}$  punkt  $D$  na krzywej  $P = 0,90$  oznacza, że statystycznie biorąc 90% próbek nie przetrzyma  $N = 8 \cdot 10^7$  zmian naprężenia itd. Ponieważ taki sposób ujęcia jest bardzo pracochłonny, usiłowano



znaleźć empiryczne zależności między wytrzymałością zmęczeniową (trwałą lub umowną) a innymi własnościami materiałów. Takie empiryczne wzory należy traktować z dużą ostrożnością, gdyż otrzymano je w określonych warunkach i dla wybranego rodzaju materiałów.

Dla stali taką zależnością między trwałą wytrzymałością  $Z_{-1}$  przy rozciąganiu a dołączoną wytrzymałością  $R_m$  jest

$$Z_{-1} \approx 0,4 \div 0,5 R_m. \quad (a)$$

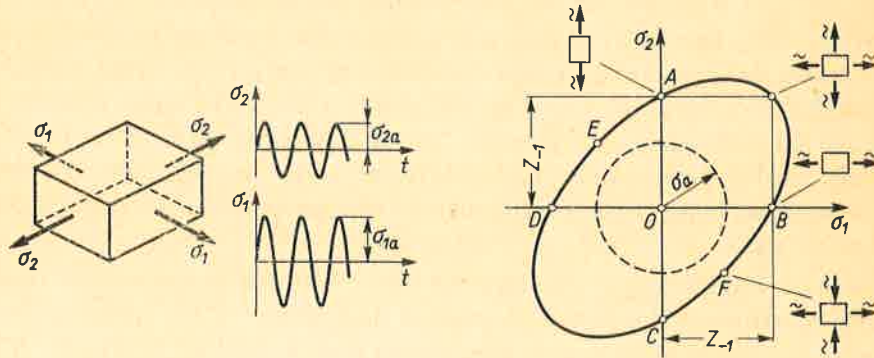
Dla stopów aluminiowych podobną zależnością między ograniczoną wytrzymałością  $\sigma_{-1}$  przy rozciąganiu a  $R_m$  (w MPa) jest

$$\sigma_{-1}/R_m = [350 + (85\psi^4/R_m)]/(350 + \psi^4), \quad (b)$$

gdzie  $\psi = \log_{10} N$  — czyli logarytm liczby zmian aż do zniszczenia.

Badania zmęczeniowych własności materiałów obejmują także przypadki działania wielowymiarowego stanu naprężeń zmiennych, z których szczególne znaczenie ma stan dwuwymiarowy, panujący na swobodnej powierzchni ciała, a więc tam, gdzie z reguły zaczyna się pęknięcie zmęczeniowe. Jeśli ograniczyć się na razie do przypadku, gdy cykle naprężeń  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są symetryczne i synchroniczne bez przesunięcia fazowego (rys. 17.11), to wiele nowszych badań wskazuje, że kryterium określające trwałą wytrzymałość zmęczeniową takiego dwuwymiarowego stanu jest identyczne z kryterium statycznego wyężenia materiału według hipotezy Hubera. Innymi słowy, jeśli wziąć dwa różne stany dwuwymiarowe o amplitudach  $\sigma_{1a}$  i  $\sigma_{2a}$  oraz  $\bar{\sigma}_{1a}$  i  $\bar{\sigma}_{2a}$  i obliczyć według wzoru (8.6a)

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_{1a}^2 - \sigma_{1a}\sigma_{2a} + \sigma_{2a}^2}, \quad \bar{\sigma}_{\text{red}} = \sqrt{\bar{\sigma}_{1a}^2 - \bar{\sigma}_{1a}\bar{\sigma}_{2a} + \bar{\sigma}_{2a}^2},$$



Rys. 17.11. Analiza zmęczenia w symetrycznym cyklu dwuwymiarowego stanu naprężenia

to te dwa różne stany są jednakowo bezpieczne, gdy

$$\sigma_{\text{red}} = \bar{\sigma}_{\text{red}}. \quad (c)$$

Jeśli jako jeden z porównywanych stanów przyjąć proste rozciąganie, dla którego  $Z_{-1}$  jest trwałą wytrzymałością zmęczeniową cyklu symetrycznego, to z wzoru (c) wynika kryterium trwałej wytrzymałości zmęczeniowej stanu naprężenia  $\sigma_1, \sigma_2$  jako

$$\sigma_{1a}^2 - \sigma_{1a}\sigma_{2a} + \sigma_{2a}^2 = Z_{-1}^2. \quad (17.3)$$

Wynikowi temu można nadać tę samą interpretację wykreślną jak na rys. 8.10. Rysując w układzie współrzędnych  $\sigma_1, \sigma_2$  punkty  $A, B, C, D$ , odpowiadające symetrycznemu cyklowi jednoosiowego stanu, prowadzimy przez nie elipsę określoną wzorem (17.3). Jest jasne, że stany dwuwymiarowe, określone punktami mieszczącymi się wewnątrz elipsy lub leżącymi na niej, są bezpieczniejsze lub tak samo bezpieczne jak stan  $Z_{-1}$ , a więc reprezentują nieograniczoną trwałość.

Bezpośrednie wykorzystanie zależności (17.3) pokażemy na przykładzie symetrycznego cyklu czystego ścinania, w którym zawsze jak wiemy, główne naprężenia  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$ . Biorąc zatem amplitudy tego stanu  $\sigma_{1a} = -\sigma_{2a} = \tau_a$  mamy z (17.3)

$$3\tau_a^2 = Z_{-1}^2 \quad \text{lub} \quad \tau_a = Z_{-1}/\sqrt{3} \approx 0,58 Z_{-1} \quad (d)$$

jako trwałą wytrzymałość zmęczeniową  $\tau_{-1} = \tau_a$  przy ścinaniu. Wynik ten potwierdzają liczne doświadczenia.

Wykreślny obraz zależności (17.3) daje także możliwość badania bezpieczeństwa w przypadkach, gdy symetryczne i synchroniczne cykle  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są przesunięte w fazie. Biorąc przykładowo przesunięcie fazy o  $\pi/2$  oraz  $\sigma_1 = \sigma_2$ , czyli

$$\sigma_1 = \sigma_a \sin \omega t, \quad \sigma_2 = \sigma_a \sin [\omega t + (\pi/2)] = \sigma_a \cos \omega t,$$

otrzymujemy po wyrugowaniu  $t$  koło  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma_a^2$ . Wrysowując to koło na obraz elipsy (rys. 17.11) widzimy, iż przy wzroście  $\sigma_a$  zetknie się ono z elipsą w punktach  $E$  i  $F$  odpowiadających czystemu ścinaniu. Wynika stąd, że trwałą wytrzymałość badanego stanu jest  $\sigma_{-1} = Z_{-1}/\sqrt{3}$ .

Podobnie możemy badać bardziej złożone przypadki, gdy symetryczne cykle  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są asynchroniczne, np.

$$\sigma_1 = \sigma_{1a} \sin \omega t, \quad \sigma_2 = \sigma_{2a} \sin 2\omega t,$$

których obraz w układzie  $\sigma_{1a}, \sigma_{2a}$  daje znane z fizyki tzw. *figury Lissajous*. Kryterium bezpieczeństwa zostaje to samo, a mianowicie figura taka musi się mieścić w polu elipsy (17.3).

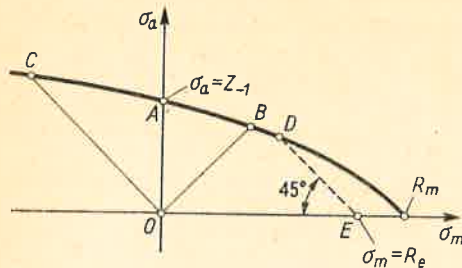
Ostatnią kwestią wymagającą omówienia jest wpływ stałego średniego naprężenia  $\sigma_m$  na wytrzymałość zmęczeniową trwałą. Z licznych badań okazuje się, że przy rozciąganiu nałożenie dodatniego  $\sigma_m$  (rozciąganie) na cykl symetryczny zmniejsza wartość amplitudy  $\sigma_a$ , odpowiadającą nieograniczonej trwałości, nałożenie natomiast ujemnego  $\sigma_m$  (ściskanie) zwiększa tę wartość  $\sigma_a$ . Fakty te ilustruje tzw. *wykres Haigha* (rys. 17.12), w którym odciętymi są wartości  $\sigma_m$ , rzędnymi  $\sigma_a$  odpowiadające nieograniczonej trwałości. Punkt  $A$ , dla którego  $\sigma_m = 0$ , przedstawia cykl symetryczny i wtedy  $\sigma_a = Z_{-1}$ . Punkty  $B$  i  $C$  przecięcia wykresu dwusiecznymi  $OB$  i  $OC$  odpowiadają cyklom pulsującym: dodatniemu i ujemnemu, dla których  $|\sigma_m| = \sigma_a$  (rys. 17.8b). Wreszcie gdy  $\sigma_a = 0$ , średnie stałe naprężenie jest równe doraźnej wytrzymałości materiału<sup>(1)</sup>, czyli  $\sigma_m = R_m$ .

Z uwagi na trudności eksperymentalne upraszczamy wykres Haigha zastępując odcinek krzywej  $CAB$  prostą przechodzącą przez punkty  $A(0; Z_{-1})$  i  $B[(Z_0/2); (Z_0/2)]$ . Dodatko-

(1) Ściśle biorąc wartość  $\sigma_m$  odpowiadająca amplitudzie  $\sigma_a = 0$  jest tzw. *wytrzymałością statyczną trwałą*  $\sigma_{\text{trwale}}$ , czyli taką wartością statycznego naprężenia, którą materiał może wytrzymać nieograniczenie długo. Dla metali w warunkach normalnych, a dla stali w zakresie temperatury do 300°C jest  $\sigma_{\text{trwale}} = R_m$ .



wym ograniczeniem jest warunek, aby nie było trwałych odkształceń, czyli żeby maksymalne naprężenie  $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$  było nie większe od granicy plastyczności materiału. Łatwo sprawdzić, że ten ostatni warunek opisuje prosta  $DE$ , przechodząca przez punkt  $E$  ( $R_e; 0$ ).



Rys. 17.12. Wykres Haigha

W przypadku dwuwymiarowego stanu, gdy cykle naprężeń  $\sigma_1, \sigma_2$  są niesymetryczne, kryterium trwałej wytrzymałości zmęczeniowej jest, jak dowodzą nowsze doświadczenia, podobne do (17.3) a mianowicie

$$\sqrt{\sigma_{1a}^2 - \sigma_{1a}\sigma_{2a} + \sigma_{2a}^2} = Z_{-1} - \chi(\sigma_{1m} + \sigma_{2m}), \quad (17.4)$$

gdzie  $\sigma_{1a}, \sigma_{2a}$  są amplitudami, a  $\sigma_{1m}, \sigma_{2m}$  — średnimi wartościami naprężeń  $\sigma_1, \sigma_2$ . Stały współczynnik  $\chi$  łatwo wyznaczyć, jeśli znamy trwałą wytrzymałość zmęczeniową  $Z_0$  pulsującego rozciągania. W takim bowiem przypadku  $\sigma_{1a} = \sigma_{1m} = Z_0/2, \sigma_{2a} = \sigma_{2m} = 0$  i z (17.4) mamy

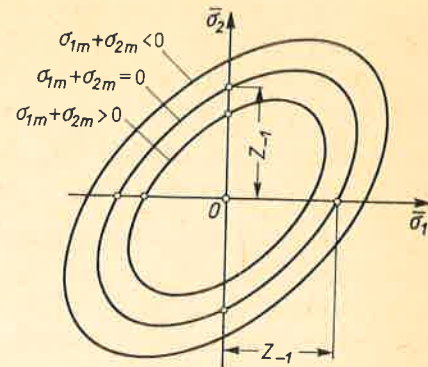
$$\chi = 2(Z_{-1}/Z_0) - 1. \quad (17.5)$$

Wykreślna interpretacja zależności (17.4) pokazana na rys. 17.13 jest bardzo podobna do poprzedniej z rys. 17.11, z tym że współrzędne  $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 - \sigma_{1m}$  i  $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2 - \sigma_{2m}$  określają tu nie całe wartości  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , lecz tylko te ich części, które zostają po wydzieleniu stałych  $\sigma_{1m}$  i  $\sigma_{2m}$ . Istnienie tych stałych naprężeń przejawia się proporcjonalnym skurczeniem elipsy (17.3), gdy  $\sigma_{1m} + \sigma_{2m} > 0$ , bądź jej „spuchnięciem”, gdy  $\sigma_{1m} + \sigma_{2m} < 0$ . Jeśli  $\sigma_{1m} + \sigma_{2m} = 0$ , to nałożenie stałych naprężeń na cykl symetryczny nie ma znaczenia. Taki przypadek zachodzi w stanie czystego ścinania, jeśli na symetryczny cykl o amplitudzie  $\tau_a$  nałożyć stałe ścinanie  $\tau_m$ .

Stosowność wzoru (17.4) podlega ograniczeniu. Jednym z nich jest ograniczenie zakresu zmienności  $\sigma_{1m} + \tau_{2m}$  do przedziału

$$\sigma_{\text{red},m} \leq R_e,$$

gdzie  $\sigma_{\text{red},m} = \sqrt{\sigma_{1m}^2 - \sigma_{1m}\sigma_{2m} + \sigma_{2m}^2}$  — naprężenie zredukowane odpowiadające naprężeniom średnim  $\sigma_{1m}, \sigma_{2m}$ . Drugim, słabszym nieco ograniczeniem jest, aby materiał był względnie jednorodny. Warunku tego nie spełnia żeliwo szare i dla niego kryterium (17.3) i (17.4) należy traktować jako informację orientacyjną.



Rys. 17.13. Ilustracja kryterium (17.4)

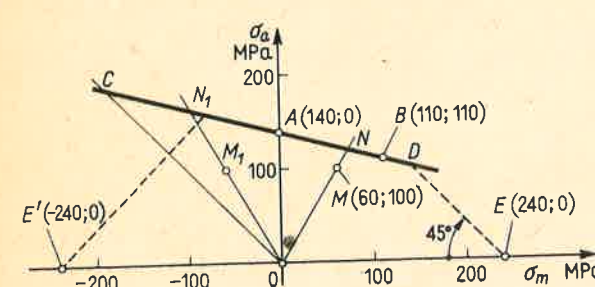
## Zadania

1. Prosty pręt z materiału, dla którego  $Z_{-1} = 140$  MPa,  $Z_0 = 220$  MPa,  $R_e = 240$  MPa, podlega zmiennemu rozciąganiu, przy czym parametry cyklu  $\sigma_{\min} = -40$  MPa,  $\sigma_{\max} = 160$  MPa. Czy w tych warunkach pręt nie pęknie nigdy, a jeśli nie, to jaki jest współczynnik bezpieczeństwa?

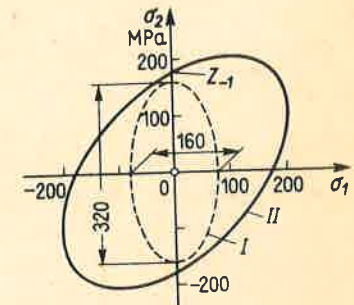
Rozwiązanie. Z danych zadania rysujemy, jak opisano poprzednio, uproszczony wykres Haigha złożony z prostej  $CABD$  i  $DE$  (rys. 17.14). Ponadto wyznaczamy punkt  $M$ , którego współrzędne

$$\sigma_m = (160 - 40)/2 = 60 \text{ MPa}, \quad \sigma_a = 160 - (-40)/2 = 100 \text{ MPa}$$

odpowiadają warunkom pracy pręta. Ponieważ punkt  $M$  leży poniżej rzędnych wykresu, zatem warunki jego pracy są łagodniejsze niż odpowiadające punktom wykresu, a więc pręt ma trwałość nieograniczoną. Aby z kolei określić współczynnik bezpieczeństwa na zmęczenie, zauważmy, że proporcjonalnemu wzrostowi  $\sigma_{\max}$  i  $\sigma_{\min}$  odpowiada na wykresie Haigha wędrówka punktu  $M$  po promieniu  $OM$ . Stan graniczny, po którego przekroczeniu może nastąpić pęknięcie zmęczeniowe, określa punkt  $N$ , a stosunek  $ON:OM \approx 1,2$  jest wartością szukanego współczynnika bezpieczeństwa  $n_z$ .



Rys. 17.14. Uproszczony wykres Haigha do zadania 1 i 2



Rys. 17.15. Do zadania 4

2. Jak zmieni się wynik zadania 1, jeśli parametry cyklu są  $\sigma_{\min} = -160$  MPa,  $\sigma_{\max} = 40$  MPa?

Odp.  $n_z = \overline{ON}_1 : \overline{OM}_1 \approx 1,7$ . Wzrost wartości  $n_z$  tłumaczy się odmiennym niż przy rozciąganiu procesem rozszerzania się mikropęknięć. Te ostatnie powstają, jak przy rozciąganiu, w wyniku poślizgów, dalszy ich jednak wzrost jest blokowany, gdyż na czole pęknięcia nie ma tendencji do „rozdzierania się” materiału.

3. W materiale (stal St 5), dla którego  $Z_{-1} = 180$  MPa, działa dwuwymiarowy stan naprężenia, w którym  $\sigma_1 = 80 \sin \omega t$  MPa,  $\sigma_2 = 160 \sin \omega t$  MPa. Określić wartość współczynnika bezpieczeństwa na zmęczenie dla nieograniczonej trwałości.

Odp. Podstawiając w (17.3)  $\sigma_{1a} = \sigma_{2a}/2$  mamy  $\sigma_{2a} = 208$  MPa jako nieprzekraczalną wartość amplitudy  $\sigma_2$ , skąd współczynnik bezpieczeństwa  $n_z \approx 208/160 = 1,3$ .

4. Jak zmieni się wynik zadania 3, jeśli składowe naprężenie  $\sigma_2$  jest przesunięte w fazie o  $\pi/2$  względem  $\sigma_1$ ?

Odp. Po wyrugowaniu  $t$  z zależności  $\sigma_1 = 80 \sin \omega t$  i  $\sigma_2 = 160 \cos \omega t$  otrzymujemy na wykresie (rys. 17.15) elipsę  $I$  mieszczącą się w elipsie  $II$  obrazującej zależność (17.3), a więc trwałość pozostaje nieograniczona. Maleje natomiast współczynnik bezpieczeństwa do  $n_z \approx 1,1$ , bo przy takim wzroście  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  elipsy  $I$  i  $II$  są styczne.

5. Pręt o średnicy  $d = 2$  cm jest rozciągany stałą siłą  $N = 20$  kN i skręcany sinusoidalnie zmiennym momentem o amplitudzie  $M = 60$  Nm. Określić współczynnik bezpieczeństwa na zmęczenie przy warunku nieograniczonej trwałości, jeśli dla materiału  $Z_{-1} = 130$  MPa,  $Z_0 = 120$  MPa.

Rozwiązanie. W najmniejbezpiecznym punkcie przekroju działają: naprężenie normalne  $\sigma = 4N/\pi d^2 \approx 64$  MPa = const i sinusoidalnie zmiennie w czasie naprężenie styczne o amplitudzie  $\tau_a = M/W_s \approx 38$  MPa. Zauważmy, że w odróżnieniu od analizowanych ogólnie przypadków (rys. 17.11),



naprężenia główne zmieniają tu nie tylko wartości, lecz i orientację w stosunku do ciała. W takim przypadku utarło się rozdzielać stały człon stanu naprężenia od zmiennego członu i dla każdego z nich oddzielnie określać naprężenia główne  $\sigma_{1m}, \sigma_{2m}$  oraz  $\sigma_{1a}, \sigma_{2a}$ , a następnie stosować kryterium (17.4). W badanym tu przypadku mamy

$$\sigma_{1m} = \sigma = 64 \text{ MPa}, \quad \sigma_{2m} = 0, \quad \sigma_{1a} = -\sigma_{2a} = \tau_a = 38 \text{ MPa}$$

i z wzoru (17.4) dla  $\gamma = 2(130/240) - 1 \approx 0,24$  widzimy, że

$$\tau_a \sqrt{3} = 66 \text{ MPa} < [Z_{-1} - \gamma(\sigma_{1m} + \sigma_{2m})] = 130 - 0,24 \sigma = 115 \text{ MPa},$$

a więc badany pręt ma nieograniczoną trwałość. Aby określić współczynnik bezpieczeństwa  $n_z$ , zauważmy, że przy  $n_z$ -krotnym wzroście obciążenia zwiększone wartości  $n_z \tau_a$  i  $n_z \sigma$  zamieniają powyższą nierówność w równanie

$$\tau_a n_z \sqrt{3} = Z_{-1} - \gamma n_z \sigma \quad \text{lub} \quad 66 n_z = 130 - 0,24 \cdot 64 n_z,$$

skąd  $n_z \approx 1,6$ .

6. Jak zmieni się wynik zadania 5, jeśli siła rozciągająca jest sinusoidalnie zmienna z tą samą częstotliwością co i moment?

Odp. Z wzoru (17.3) mamy  $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau_a^2} = 92 \text{ MPa}$  i  $n_z = 130/92 \approx 1,4$ .

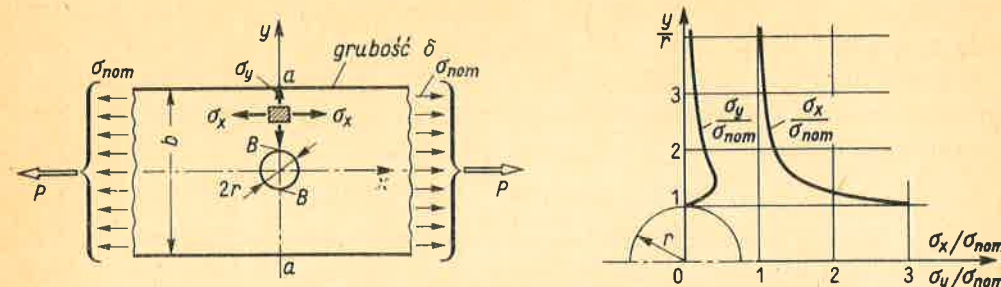
### 17.3. Wpływ spiętrzenia naprężeń na wytrzymałość zmęczeniową

Z opisanych w art. 17.2 faktów wynika, że im większe są *makroskopowe naprężenia*, tj. naprężenia określone przy założeniu jednorodności materiału, tym prędzej zachodzi pęknięcie zmęczeniowe. Gdy taki stan naprężenia jest jednorodny, wszystkie fragmenty danego obiektu (elementu maszyny) są równoprawne. Miejsce pęknięcia jest wtedy całkowicie przypadkowe, zależy bowiem od defektów ziarna lub grupy ziaren. Gdy makroskopowy stan naprężenia jest niejednorodny, pęknięcie rozpocznie się w tym fragmencie, gdzie wartości naprężeń są największe, nawet wtedy, gdy ten fragment jest bardzo niewielki w porównaniu z całym elementem. Ten stwierdzony doświadczalnie fakt stanowi istotną różnicę między działaniem obciążenia stałego a działaniem obciążenia zmiennego. W pierwszym przypadku w takim wyróżnionym fragmencie następuje przy wzroście obciążenia lokalne płynięcie materiału wyrównujące rozkład naprężeń do poziomu, jaki panuje w innych „zdrowych” fragmentach. Powstające przy tym poślizgi w ziarnach powodują jedynie lepsze „dopasowanie się” mikrostruktury do przenoszenia danego obciążenia i nie stanowią żadnego niebezpieczeństwa. Inna jest sytuacja przy obciążeniach zmiennych. W wyróżnionym fragmencie, nawet małym na skalę makroskopową, istnieje zawsze dostateczna liczba słabszych ziaren, od których rozpoczyna się pęknięcie mające tendencję ciągłego wzrostu, jak to opisano w art. 17.1. W odróżnieniu zatem od analizy statycznej, w analizie zmęczenia rzeczywistych obiektów należy zwrócić specjalną uwagę nie tylko na całość elementu, lecz i na drobne jego fragmenty.

Takimi niezauważanymi dotąd fragmentami są karby, czyli raptowne zmiany przekroju, otwory itp., oraz miejsca wprowadzenia skupionych sił. Jak dowodzą teoria sprężystości i pomiary, w miejscach takich zachodzi lokalny wzrost naprężeń, a ich wartości mogą być kilka razy większe niż tzw. *wartości nominalne*, obliczone jak gdyby karbu nie było.

Weźmy dla przykładu rozciągany płaskownik osłabiony małym otworem (rys. 17.16). Gdyby otworu nie było, naprężenia miałyby wartość nominalną

$$\sigma_{nom} = P/A = P/b \delta. \tag{a}$$



Rys. 17.16. Koncentracja naprężeń w rozciągany płaskowniku

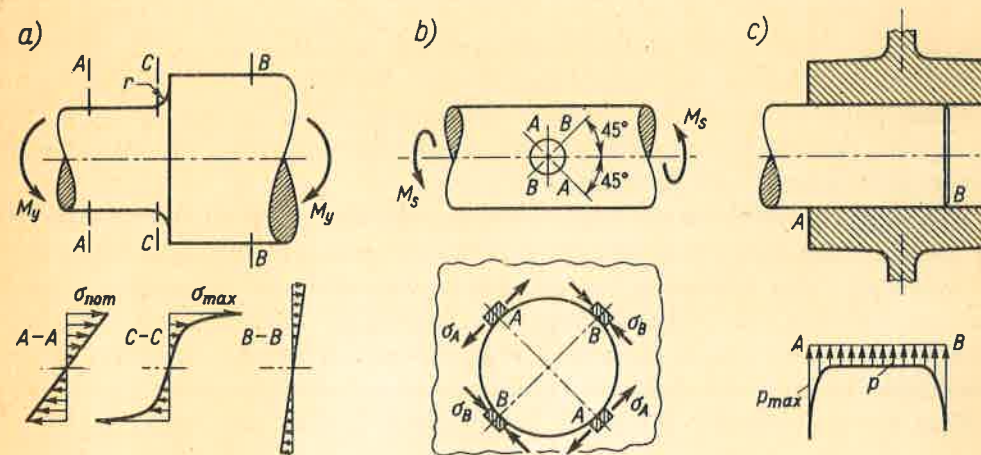
Jeżeli otwór istnieje, to jak wynika z teorii sprężystości, stan naprężenia w przekroju *a-a* jest dwuwymiarowy. Naprężenia

$$\sigma_x = \sigma_{nom} [1 + (r^2/2y^2) + (3r^4/2y^4)], \quad \sigma_y = (3\sigma_{nom}/2) [(r/y)^2 - (r/y)^4]$$

mają przebieg podany na rysunku. Widać, że w miarę wzrostu *y*, tj. odległości od osi otworu, naprężenie  $\sigma_x$  spada szybko do wartości  $\sigma_{nom}$ , a  $\sigma_y \rightarrow 0$ . Niebezpieczne są punkty *B* na krawędzi otworu, gdzie

$$(\sigma_x)_{max} = 3\sigma_{nom}, \quad \sigma_y = 0. \tag{b}$$

Podobne zjawisko lokalnego wzrostu wartości, tzw. *spiętrzenia naprężeń*, obserwujemy w wielu innych przypadkach, jak zginanie stopniowanego wału (rys. 17.17a), gdzie wartość szczytu naprężeń zależy przede wszystkim od promienia *r* zaokrąglenia przejścia. Tak samo przy skręcaniu wału osłabionego poprzecznym otworem (rys. 17.17b) szczytowe



Rys. 17.17. Przykłady spiętrzenia naprężeń



naprężenia normalne występują w punktach *A* i *B* na krawędzi. Gdy otwór jest mały, ich wartości są cztery razy większe od nominalnej wartości

$$\tau_{nom} = M_s / W_s \quad (c)$$

obliczonej dla pręta bez otworu. Również w połączeniach wciskanych (rys. 17.17c) pojawia się na końcu tulei i wałka spiętrzenie nacisków *p*.

Ponieważ działanie karbu ma charakter lokalny, naprężenia w otoczeniu karbów nazywamy *lokalnymi*. Ich wskaźnikiem jest tzw. *teoretyczny współczynnik spiętrzenia (koncentracji) naprężeń*

$$\bar{k}_t = \sigma_{max} / \sigma_{nom} \quad \text{lub} \quad \bar{k}_t = \tau_{max} / \tau_{nom}, \quad (17.6)$$

gdzie  $\sigma_{max}$  lub  $\tau_{max}$  — wartość maksymalna naprężenia lokalnego. Wartość naprężenia nominalnego  $\sigma_{nom}$  określamy, powodując się prostotą obliczeń, w sposób umowny, który wobec tego trzeba każdorazowo zdefiniować. I tak w przykładzie (rys. 17.16) poza definicją (a) można określać  $\sigma_{nom}$  jako

$$\sigma_{nom} = P / A_{a-a} = P / (b - 2r) \delta, \quad (d)$$

przy czym takiej umowie odpowiadają inne niż przedtem wartości  $\bar{k}_t$ . Podobnie dla zginanego wału (rys. 17.17a) przy definicji

$$\sigma_{nom} = M_y / (W_y)_{A-A} \quad \text{lub} \quad \sigma_{nom} = M_y / (W_y)_{B-B} \quad (e)$$

należy wyraźnie wskazać definicję wybraną.

Definicja (17.6) współczynnika  $\bar{k}_t$  wystarcza, gdy badany element jest płaski, wtedy bowiem  $\sigma_{max}$  występuje na swobodnej krawędzi, gdzie panuje jednowymiarowy stan naprężenia. Inaczej jest w przypadku wałka (rys. 17.17a). Niebezpieczny jest tu też punkt na swobodnej powierzchni, ale stan naprężenia jest dwuwymiarowy, gdyż wałek jest tworem przestrzennym. W takich przypadkach prawidłowy, lecz niestety mało zbadany, jest współczynnik

$$\bar{k}'_t = \sigma_{red\ max} / \sigma_{nom}, \quad (17.7)$$

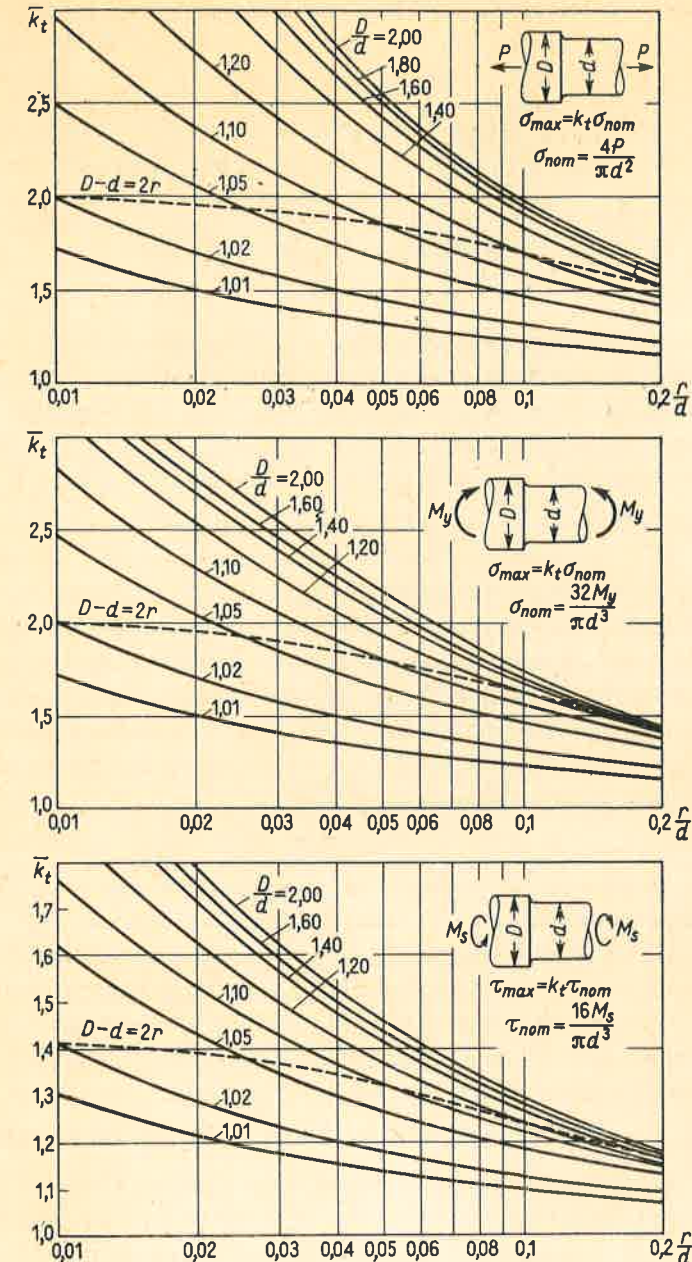
gdzie  $\sigma_{red\ max}$  — maksymalne zredukowane naprężenie lokalne.

Wartości  $\bar{k}_t$  lub  $\bar{k}'_t$  są znane dla wielu typowych kształtów. Zazwyczaj podaje się je w postaci wykresów jak na rys. 17.18 określającym  $\bar{k}_t$  dla stopniowanego wałka przy rozciąganiu, zginaniu lub skręcaniu. Jak widać, współczynnik  $\bar{k}'_t$  jest tu funkcją bezwymiarowego promienia  $r/d$  i stosunku  $D/d$ .

Współczynnik  $\bar{k}_t$  określa się przy założeniu sprężystości i jednorodności materiału. Nie można przeto z góry stwierdzić, że przedstawia on wpływ spiętrzenia naprężeń na wytrzymałość, której mechanizm jest związany z właściwościami plastycznymi i mikrostrukturą materiału oraz rodzajem obciążenia. Wpływ ten ujmujemy tzw. *efektywnym współczynnikiem spiętrzenia*  $\bar{k}_\kappa$  odmiennym od  $\bar{k}_t$ , przy czym wskaźnik  $\kappa$  identyczny z współczynnikiem asymetrii cyklu (wzór 17.1), charakteryzuje rodzaj obciążenia.

Przy stałym obciążeniu, gdy  $\kappa = 1$ , współczynnik  $\bar{k}_\kappa = \bar{k}_{+1}$  definiujemy jako

$$\bar{k}_{+1} = \frac{\text{statyczne obciążenie niszczące element bez karbu}}{\text{statyczne obciążenie niszczące element z karbem}}, \quad (17.8)$$



Rys. 17.18. Teoretyczny współczynnik spiętrzenia naprężeń dla pełnego stopniowanego wału  
Źródło: Royal Aeronautical Society Data Sheets 69021. 1969.



Dla materiałów plastycznych i nie za głębokich korbów wpływ lokalnych naprężeń na wartość obciążenia niszczonego jest bez znaczenia, zachodzi bowiem opisane poprzednio lokalne uplastycznienie. Tak na przykład siła  $P_n$  rozrywająca płaskownik (rys. 17.16)

$$P_n = R_m(b-2r)\delta$$

jest równa sile rozrywającej gładki płaskownik o tym samym przekroju „netto”. Tak więc przy podanych ograniczeniach można przyjąć, że dla materiałów plastycznych

$$\bar{k}_{+1} = 1.$$

Dla materiałów kruchych, jak pokazują doświadczenia, wartość

$$\bar{k}_{+1} \approx \bar{k}_t.$$

Wyjątek stanowi szare żeliwo, dla którego  $\bar{k}_{+1} = 1$ . Przyczyną tego jest struktura żeliwa, w której rozsiane płatki grafitu są tak silnymi ogniskami spiętrzenia naprężeń, że wszystkie inne konstrukcyjne spiętrzenia, spowodowane otworami, odsadzeniami itp. nie mają żadnego znaczenia.

Przy symetrycznym cyklu naprężeń, gdy  $\nu = -1$ , współczynnik  $\bar{k}_\nu = \bar{k}_{-1}$  definiujemy, jak następuje:

$$\bar{k}_{-1} = Z_{-1} / Z_{-1s}, \quad (17.9)$$

gdzie  $Z_{-1}$  — trwała wytrzymałość zmęczeniowa elementu gładkiego, a  $Z_{-1s}$  — trwała wytrzymałość zmęczeniowa określona jako nominalne naprężenie elementu z karbem.

W nauce o zmęczeniu *panował dawniej pogląd, że współczynnik  $\bar{k}_{-1}$  jest zawsze mniejszy od  $\bar{k}_t$* . Powodem tego było, że dane o zmęczeniu uzyskiwano niemal wyłącznie z próbek o małych wymiarach wykonanych na ogół z miękkich materiałów. Ponadto dawne wartości  $\bar{k}_t$  określano niedokładnie. W wyniku wielu nowszych badań panuje obecnie pogląd, że dla stali i stopów aluminium wartość

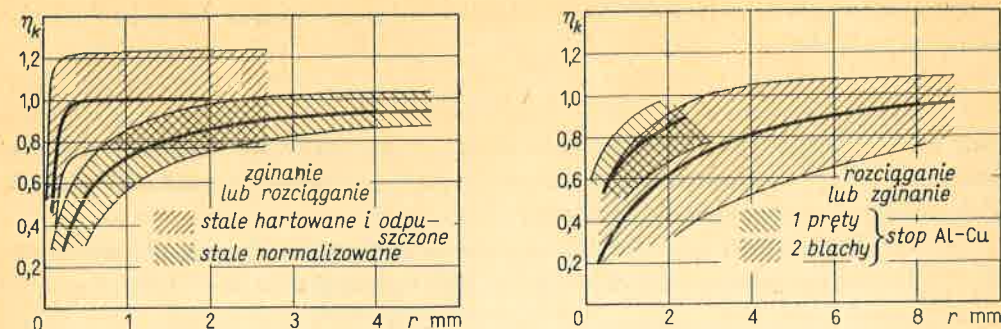
$$\bar{k}_{-1} \approx \bar{k}_t,$$

pod warunkiem, że promień krzywizny  $r$  dna karbu nie jest zbyt mały. Jako graniczne wartości przyjmuje się dla stali  $r = 1 \div 2$  mm, dla stopów Al jest  $r = 3 \div 4$  mm. Sens tego warunku stanie się jasny, jeśli zważyć, że promień  $r$  jest parametrem mającym istotny wpływ na wielkość obszaru, w którym występuje spiętrzenie naprężeń (por. rys. 17.16). Gdy  $r$  jest małe, wymiary tego obszaru są porównywalne z wymiarami ziarna i obliczona teoretycznie wartość  $\bar{k}_t$  traci sens. W przypadku takich ostrych korbów wartości  $\bar{k}_{-1}$  wyznacza się doświadczalnie. Utało się przy tym, że wyniki podaje się w postaci

$$\bar{k}_{-1} = 1 + \eta_k(\bar{k}_t - 1), \quad (17.10)$$

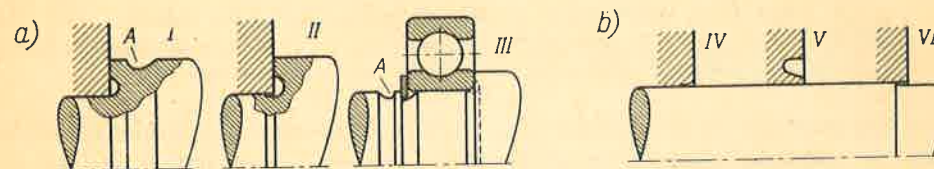
gdzie  $\eta_k$  — tzw. *współczynnik wrażliwości materiału na działanie karbu* jest funkcją  $r$  oraz rodzaju obciążenia (rozciąganie, skręcanie itp.). Wykresy  $\eta_k(r)$  przy rozciąganiu i zginaniu dla stali i stopów Al z zaznaczonym pasmem rozrzutów podaje rys. 17.19. Dla żeliwa szarego wartość  $\eta_k \approx 0$  i  $\bar{k}_{-1} \approx 1$  jak poprzednio.

Przy obliczeniach wytrzymałości zmęczeniowej istnienie naprężeń lokalnych uwzględnia się zwiększając odpowiednio  $\bar{k}_{+1}$  i  $\bar{k}_{-1}$  razy nominalne wartości średnich naprężeń  $\sigma_m$  i amplitud  $\sigma_a$ . Tak zwiększone wartości wykorzystujemy na wykresie Haigha, bądź w kryteriach (17.3) lub (17.4). Na ogół przy tym przyjmuje się  $\bar{k}_{+1} = 1$ .



Rys. 17.19. Współczynnik  $\eta_k(r)$  wrażliwości na działanie karbu

Redukcja szkodliwego wpływu, jaki wywiera spiętrzenie naprężeń na wytrzymałość zmęczeniową, wymaga uczulenia konstruktora na prawidłowe kształtowanie szczegółów. Tak więc należy unikać ostrych zmian przekroju, w nieuniknionych wewnętrznych kątach stosować możliwie duże promienie zaokrąglenia lub nawet ciągłą zmianę promienia krzywizny, otwory umiejscawiać w strefach małych naprężeń itp. Gdy z braku miejsca nie można dać zaokrąglenia o dużym promieniu, np. gdy czołowa powierzchnia odsadzenia ma być oporowa, stosuje się tzw. *karby odciążające* redukujące spiętrzenie naprężeń (rys. 17.20a). Podobne chwytów stosujemy we wspomnianych poprzednio połączeniach skurczowych (rys. 17.20b). Szczegółowe omówienie oraz analiza ilościowa tych zagadnień jest przedmiotem wykładów części maszyn.



Rys. 17.20. Przykłady redukcji spiętrzenia naprężeń

I — wtoczenie się w grubszą część wału i karb odciążający  $A$  w tejże części; II — podtoczenie cieńszej części zwiększa promień zaokrąglenia i łagodzi spiętrzenie nacisków piasty na wał; III — odciążające karby  $A$  po obydwóch stronach pierścienia ustalającego łożysko, złagodzenie spiętrzenia nacisków pierścienia łożyska na wał; IV — zaokrąglenie łagodzi spiętrzenie nacisków na krawędzi; V — karb odciążający w piastce; VI — inny wariant rozwiązania IV.

## 17.4. Wpływ stanu powierzchni i wielkości elementu

Jak już wiadomo, pęknięcie zmęczeniowe zaczyna się z reguły na powierzchni elementu, wobec czego stan tej powierzchni ma istotne znaczenie w przebiegu procesu zmęczenia. W zagadnieniu tym występuje równolegle kilka czynników. Pierwszym z nich jest gładkość powierzchni, albowiem istniejące na powierzchni ślady obróbki mechanicznej działają jak mikrokarby; zatem im powierzchnia jest bardziej gładka, tym wytrzymałość zmęczeniowa jest większa. Wpływ ten będzie tym wyraźniejszy, im materiał jest bardziej wrażliwy na działanie karbu. Dla stali wrażliwość ta rośnie wraz z wytrzymałością doraźną (rys. 17.19).

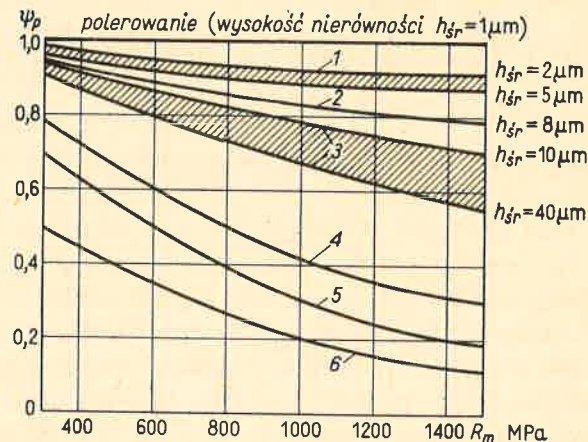


Od strony ilościowej wpływ gładkości powierzchni uwzględnia się *współczynnikiem jakości powierzchni*

$$\psi_p = Z_{-1p} / Z_{-1}, \quad (17.11)$$

gdzie  $Z_{-1p}$  — wytrzymałość zmęczeniowa próbki o gładkości odpowiadającej badanemu elementowi,  $Z_{-1}$  — wytrzymałość zmęczeniowa próbki o umownej gładkości zazwyczaj odpowiadającej dokładnemu szlifowaniu i polerowaniu.

Orientacyjne wartości  $\psi_p$  w funkcji wytrzymałości doraźnej  $R_m$  daje dla stali wykres (rys. 17.21). Wykorzystanie tych informacji w obliczeniach polega na zwiększeniu rzeczy-



Rys. 17.21. Współczynnik jakości powierzchni  $\psi_p(R_m)$  dla stali

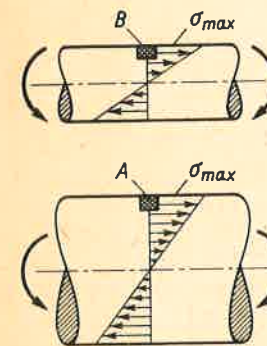
Stan powierzchni: 1 — szlifowanie, 2 — staranne toczenie, 3 — zgrubne toczenie, 4 — z nasadkami walcowanymi, 5 — trawienie wodą wodociągową, 6 — trawienie wodą morską;  $h_{sr}$  — średnia wysokość nierówności.

wistych amplitud  $\sigma_a$  cyklu do wartości  $\sigma_a/\psi_p$ , przy pozostawieniu nie zmienionych średnich wartości  $\sigma_m$ , na które gładkość powierzchni nie ma wpływu. Niezależnie od tego widać istotną korzyść, jaką daje zwiększenie gładkości powierzchni szczególnie dla stali o wysokiej wytrzymałości doraźnej. Jest przy tym zrozumiałe, że o dobrą gładkość należy dbać specjalnie w miejscach spiętrzenia naprężeń. Równie ważną informację o roli pokryty antykorozyjnymi i należytej konserwacji maszyn dają krzywe 5 i 6.

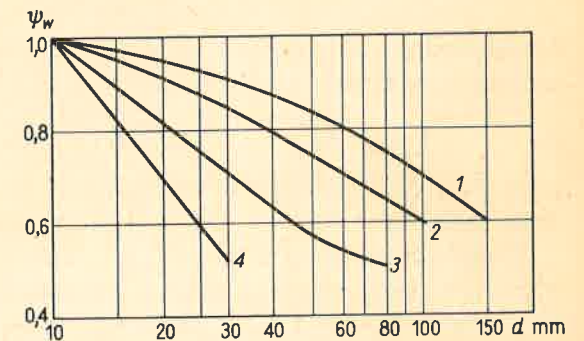
Wytrzymałość zmęczeniową można znacznie (do 50%) zwiększyć przez wytworzenie naprężeń ściskających w warstwie wierzchniej elementu. Cel ten można osiągnąć metodami czysto mechanicznymi lub przez obróbkę cieplno-chemiczną. Do pierwszych należą takie sposoby jak młotkowanie, rolkowanie bądź kulkowanie. Wszystkie one prowadzą się do wywołania trwałych odkształceń warstwy wierzchniej, na skutek czego ma ona tendencję rozszerzania się w kierunku stycznym do powierzchni. Ta tendencja jest skrepowana przez materiał wnętrza, w rezultacie czego powstaje ściskanie warstwy powierzchniowej. Dzięki takiemu zabiegowi można osiągnąć na przykład to, że element kuty i poddany kulkowaniu ma wytrzymałość zmęczeniową taką jak tenże element obrobiony mechanicznie i polerowany. Jeszcze lepsze efekty w odniesieniu do stali daje obróbka cieplna bądź cieplno-chemiczna. Celem pierwszej jest wytworzenie struktury martenzytycznej

w warstwie wierzchniej. Jak wiadomo, rozpadowi austenitu na martenzyt towarzyszy wzrost objętości. Jeśli taka przemiana zachodzi tylko w warstwie wierzchniej, to sytuacja jest jak opisana poprzednio, a mianowicie tendencji rozszerzania się warstwy wierzchniej przeciwstawia się rdzeń i w rezultacie mamy w niej pożądane naprężenia ściskające. Dodatkowym dodatnim czynnikiem jest, że przemiana martenzytyczna polepsza wytrzymałość. Bez wytworzenia jednak ściskających naprężeń sama ulepszona warstwa łatwo kruszy się i odpryskuje nie dając żadnego zysku na wytrzymałości zmęczeniowej. Podobne efekty daje obróbka cieplno-chemiczna, jak nawęglanie i azotowanie.

Poza stanem powierzchni jeszcze jednym czynnikiem, który należy uwzględnić w obliczeniach wytrzymałości zmęczeniowej elementu, jest tzw. *wpływ wielkości*. Z doświadczenia okazuje się, że własności zmęczeniowe większych elementów są gorsze niż mniejszych geometrycznie podobnych. Fakt ten objaśnia się wpływem procesów technologicznych i wpływem rozkładu naprężeń. Odnośnie do pierwszego trzeba zauważyć, że w elementach kutyh lub walcowanych własności mechaniczne polepszają się ze wzrostem zgniotu. Zgniot ten jest zwykle większy w elementach mniejszych. Odnośnie do drugiego wpływu, jeśli przyjąć, że defekty struktury są, statystycznie biorąc, równomiernie rozsiane w danym materiale, a ich gęstość niezależna od objętości, to prawdopodobieństwo wystąpienia pęknięcia zmęczeniowego jest większe w większym elemencie. Widać to z rys. 17.22, na



Rys. 17.22. Wpływ wielkości na warunki pracy



Rys. 17.23. Współczynnik wielkości  $\psi_w$  dla stali  
1 — stale konstrukcyjne węglowe bez spiętrzenia naprężeń; 2 — stale stopowe ( $R_m \approx 1200$  MPa) bez spiętrzenia naprężeń i stale węglowe z umiarkowanym spiętrzeniem; 3 — stale stopowe przy umiarkowanym spiętrzeniu naprężeń; 4 — stale przy bardzo silnym spiętrzeniu.

którym podano dwa różne zginane wałki, których naprężenia  $\sigma_{max}$  są równe. Z dwóch jednakowych kostek A i B w warunkach gorszych znajduje się kostka A większego wałka, gdyż ma większą uśrednioną wartość naprężeń.

Wpływ wielkości opisujemy tzw. *współczynnikiem wielkości*

$$\psi_w = Z_{-1e} / Z_{-1}, \quad (17.12)$$

gdzie  $Z_{-1e}$  — wytrzymałość zmęczeniowa elementu, a  $Z_{-1}$  — wytrzymałość standardowej próbki. Z reguły wymiar poprzeczny próbki jest rzędu 7÷12 mm. Zakłada się także, że stan powierzchni próbki i elementu jest taki sam. Orientacyjne wartości  $\psi_w$  dla stali podaje rys. 17.23. Współczynnik ten stosujemy w podobny sposób jak poprzedni współ-



czynnik  $\psi_p$ , a mianowicie zamiast rzeczywistej wartości amplitudy  $\sigma_a$  bierzemy  $\sigma_a/\psi_w\psi_p$ , zostawiając nie zmienioną wartość  $\sigma_m$ .

### 17.5. Uwagi końcowe

Fakty przedstawione w art. 17.3 i 17.4 należy uwzględnić przy ocenie bezpieczeństwa elementu przez odpowiednie zwiększenie nominalnych parametrów cyklu  $\sigma_a$  i  $\sigma_m$ . W przypadku jednowymiarowego stanu naprężenia daje to obliczeniowe parametry cyklu o wartościach

$$\sigma_m \bar{k}_{+1}, \quad \sigma_a \bar{k}_{-1}/\psi_p\psi_w. \quad (17.13)$$

Nanosząc te wartości na wykresie Haigha, jak w zadaniu 1 art. 17.2, otrzymujemy punkt  $M$  (rys. 17.14) reprezentujący obliczeniowe warunki pracy w badanym punkcie elementu, a stąd można już wyznaczyć wartość współczynnika bezpieczeństwa.

Podobnie postępujemy w przypadku dwuwymiarowego stanu naprężenia. Dla konstrukcji prętowych najważniejszy jest ten, w którym cykl naprężeń w badanym punkcie elementu podany jest nie przez naprężenia główne, lecz przez nominalne wartości

$$\sigma_m, \sigma_a \text{ i } \tau_m, \tau_a.$$

Uwzględniając efekt działania karbu, wpływ stanu powierzchni i wpływ wielkości, otrzymujemy obliczeniowe wartości cyklu

$$\sigma_m \bar{k}_{+1}, \quad \sigma_a \bar{k}_{-1\sigma}/\psi_p\psi_w, \quad \tau_m \bar{k}_{+1}, \quad \tau_a \bar{k}_{-1\tau}/\psi_p\psi_w,$$

gdzie  $\bar{k}_{-1\sigma}, \bar{k}_{-1\tau}$  — efektywne współczynniki spiętrzenia naprężenia normalnego i stycznego, mają różne wartości, jak to widać chociażby z rys. 17.18.

Powyższe wartości wstawiamy do zależności (17.4). Zauważając mianowicie, że  $\sigma_{1a}^2 - \sigma_{1a}\sigma_{2a} + \sigma_{2a}^2$  oraz  $\sigma_{1m} + \sigma_{2m}$  są niezmiennikami stanu naprężenia, można zamiast nich wstawić  $\sigma_a^2 + 3\tau_a^2$  i  $\sigma_m$ , a przy uwzględnieniu rzeczywistych warunków odpowiednio ich zwiększone wartości. W rezultacie kryterium (17.4) przybiera postać

$$\sqrt{(\sigma_a \bar{k}_{-1\sigma})^2 + 3(\tau_a \bar{k}_{-1\tau})^2} = (Z_{-1} - \chi \sigma_m \bar{k}_{+1}) \psi_w \psi_p, \quad (17.14)$$

gdzie  $Z_{-1}$  — wytrzymałość zmęczeniowa polerowanej próbki z danego materiału,  $\chi$  — współczynnik według wzoru (17.5).

W podanym sposobie kryje się szereg nieścisłości i dowolności. Jedną z nich jest ukryte założenie, że maksymalna wartość naprężenia  $\sigma_a$ , czyli  $\bar{k}_{-1\sigma} \sigma_a$ , i naprężenia  $\tau_a$ , czyli  $\bar{k}_{-1\tau} \tau_a$ , występują w tym samym punkcie ciała. Z tych powodów wzór (17.14) jak i wiele innych spotykanych w literaturze należy traktować z dużą ostrożnością. Dodatkowym czynnikiem jest niepewność wartości samych współczynników  $\bar{k}_{-1}, \psi_w, \psi_p$ , których średnie tolerancje są często rzędu  $\pm 15\%$ . Łatwo sprawdzić, że w tych warunkach końcowy wynik obliczeń może mieć rozrzuty  $\pm 40\%$ . W tej sytuacji obliczenia takie należy traktować jako orientacyjne, a ostateczne słowo oddać doświadczeniu.